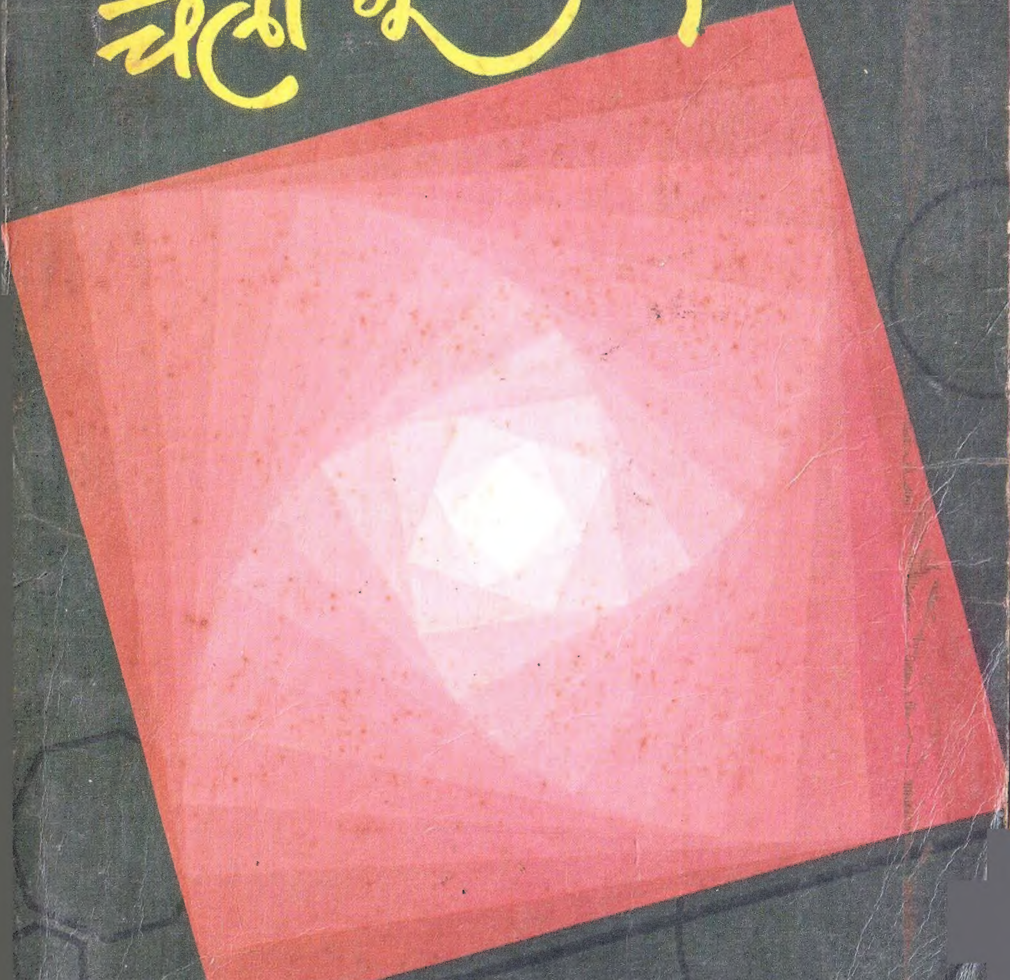
प्रा. मोहन आपटे

# चला भूमितीशी खेळू या!



# चला भूमितीशी खेळूया!

प्रा. मोहन आपटे

मोरया
प्रकाशन

प्रकाशक / मुद्रकः
**दिलीप महाजन**
**मोरया प्रकाशन**
'संपदा', शास्त्रीनगर, डोंबिवली (प.),
जि. ठाणे - ४२१ २०२.

**पुणे शाखा :**
अनुश्री सोसायटी, ४०/१० एरंडवणा,
इंदिरा हाईटस् जवळ, पुणे ४११ ०३८.

प्रथमावृत्ती :



मुखपृष्ठ :
**अनिल दाभाडे**

अक्षरजुळणी :
**रुपाली डेटा सर्व्हीसेस**
१, अनुपम अपार्टमेंट,
केळकर रोड, डोंबिवली (पू.).

मुद्रणस्थळ :
**स्मिता प्रिंटर्स**
सदाशिव पेठ,
पुणे.

विद्यार्थी मित्रांनो !

भूमिती हा एक रटाळ विषय आहे, अशीच बहुधा तुमची समजूत झालेली असणार. भूमितीमधील असंख्य प्रमेये, सिध्दांत, उपसिध्दांत, सिध्दता आणि रचना यांचा अभ्यास करताना आपल्या मेंदूचे काटे ढिले होत आहेत असे तुम्हाला वाटत असेल. कदाचित् नावडत्या विषयात तुम्ही भूमितीची गणना करीत असाल, पण वस्तुस्थिती अगदी निराळी आहे. सभोवार नीट निरखून पाहिलंत तर भूमितीची महत्ता तुमच्या लक्षात येईल.

मानवी जीवनात सौदर्याचा शिडकावा करण्याचे काम भूमितीशिवाय क्वचितच दुसऱ्या विषयाने केले असेल. अत्यंत आकर्षक आणि टुमदार बंगले, अतीभव्य, उत्तुंग इमारती, विशाल व मनमोहक प्राकार, मंदिरांची गगनचुंबी . डौलदार शिखरे, एवढंच काय अत्यंत मौल्यवान साड्यांवरील नक्षीकाम, या आणि अशा अनेक गोष्टीत भूमितीची करामत पहायला सापडते. शिल्पकाम, स्थापत्यशास्त्र, वास्तूशास्त्र, गृहरचनाशास्त्र आणि चित्रकला अशा अनेक शास्त्रांचा भूमिती हाच पाया आहे.

आपल्यापैकी अनेकांचा पायाभूत भूमितीशी असलेला संपर्क शालेय जीवनानंतर संपुष्टात येतो. त्यामुळे भूमितीमधील कल्पकतेची झेप आणि अभिनव सिध्दांत, यांची आपल्याला कधीच तोंडओळख होत नाही. क्रमिक पुस्तकांच्या बाहेरील भूमिती विविधांगी नटलेली आहे. तिचे ओझरते दर्शन हाच प्रस्तुत पुस्तकाचा महत्वाचा हेतू आहे. पायाभूत आकृत्या काढण्याच्या विविध पध्दती, त्यांच्या आधाराने निर्माण केलेले नक्षीकाम, भूमितीमधील आश्चर्यकारक सिध्दांत, त्रिमितीय आकृत्यांच्या प्रतिकृती,. भूमितीमधील

काही विशेष आकृत्या आणि आकृतीबंध, फ्रॅक्टल्स नावाच्या आधुनिक भूमितीची तोंडओळख, अशा अनेक विषयांना मी ह्या पुस्तकात स्पर्श करण्याचा प्रयत्न केला आहे.

ज्या कुणाला कोनमापकाचा उपयोग करुन कोन मोजता येतात, ज्याला कंपासचा उपयोग करुन वर्तुळ रेखाटता येते व जो पट्टीच्या साह्याने सरळ रेषा काढू शकतो, त्या सर्वांना ह्या पुस्तकातील सर्व आकृत्या सहजपणे काढता येतील. त्यासाठी चित्रकलेची आवड असण्याची किंवा कोणत्याही खास साधनाची आवश्यकता नाही. तुम्हाला भूमितीशी खेळता यावे म्हणून हे पुस्तक मी लिहिले आहे. अर्थात ह्या पुस्तकांतील आकृत्या पाहून व त्यांच्या कृती वाचून न थांबता, त्या आकृत्या तुम्ही प्रत्यक्ष काढाव्यात अशी अपेक्षा आहे.

इत्यलम् ।

**प्रा. मोहन आपटे.**

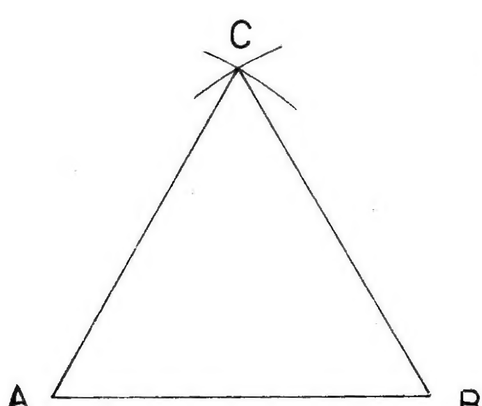
# अनुक्रमणिका

# अनुक्रमणिका

## १ : नियमीत बहुभुजाकृती कशा काढाल

भूमितीशी खेळायचं म्हणजे विविध प्रकारच्या बहुभुजाकृतींचं ज्ञान तर हवंच आणि त्या काढताही आल्या पाहिजेत. बहुभुजाकृती म्हणजे अनेक बाजू असलेली पण मर्यादित आकार असललेली आकृती. त्रिकोण, चौरस, पंचकोन ही झाली बहुभुजाकृतींची काही उदाहरणं. खरं तर अशा प्रकारच्या आकृत्या तुम्हाला साध्या पट्टीनेही काढता येतील. परंतू बहुभुजाकृतींच्या सर्व बाजू आणि सर्व कोन समान हवे असतील तर मात्र नुसत्या पट्टीचा काहीच उपयोग नाही. त्यासाठी एक तर कोनमापकाचं नाही तर कंपासाचं सहाय्य घ्यायला हवं. समजा एखादी सुंदर नक्षी रेखाटायची असेल तर सर्व बाजू व सर्व कोन समान असणाऱ्या आकृत्यांचा चांगलाच उपयोग करता येतो. अशा विशिष्ट बहुभुजाकृतींना नियमीत बहुभुजाकृती असं नाव आहे. इंग्रजीत त्यांना रेग्युलर पॉलीगॉन असं म्हणतात.

समभुज त्रिकोण, चौरस, नियमीत पंचकोन व षट्कोन ह्या आकृत्या काढता आल्या की अष्टकोन, दशकोन आणि द्वादशकोन असलेल्या नियमीत बहुभुजाकृती सहज काढता येतील. अर्थातच ह्या चार बहुभुजाकृती कंपासच्या सहाय्यानं कशा काढायच्या हे प्रथम पहायला हवं.




**समभुज त्रिकोण :** काढायला सर्वात सोपी असं या आकृतीचं वर्णन करता येईल. समभुज त्रिकोणाच्या सर्व बाजू समान असतात. आणि सर्व कोन ६० अशांचे असतात.

प्रथम पाहिजे त्या लांबीची AB ही एक रेषा काढा, आणि कंपासमध्ये AB एवढ्याच अंतराची त्रिज्जा मोजून घ्या.

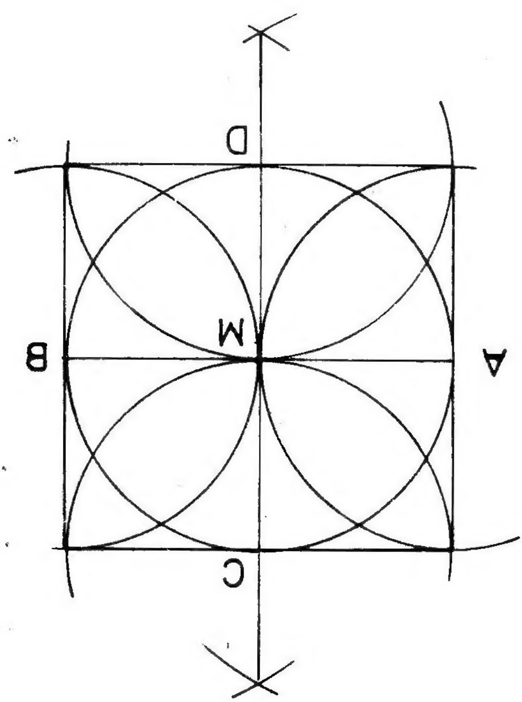
कंपासाचे टोक प्रथम A या बिंदूवर आणि नंतर B या बिंदूवर ठेवून दोन चाप काढा, हे दोन चाप ज्या बिंदूत परस्परांना छेदतील त्याला C हे नाव द्या.

A व C तसेच B व C हे बिंदू जोडून AC आणि BC ह्या रेषा काढा. ABC हा आपल्याला पाहिजे असलेला समभुज त्रिकोण असेल.

**चौरस :** दिसायला साधी पण काढायला अवघड अशी ही आकृती आहे. चौरसाच्या चारही बाजू समान असतात व चारही कोन 90 अंशाचे असतात, हे तुम्हाला माहित आहेच.

चौरस काढण्यासाठी दिलेल्या रेषेचा मध्यबिंदू कसा शोधून काढायचा ह्याची माहिती हवी. त्यासाठी आपली पद्धत पुढील प्रमाणे असेल.

पाहिजे त्या लांबीची AB ही रेषा काढा. ह्या रेषेच्या लांबीएवढे अंतर कंपासमध्ये मोजून घ्या आणि A व B ह्या बिंदूपासून रेषेच्या वर आणि खाली प्रत्येकी दोन चाप काढा. हे चाप परस्परांना दोन बिंदूत छेदतील.




एका सरळ रेषेने हे दोन बिंदू जोडा. ही रेषा AB ह्या आपण काढलेल्या रेषेला एका बिंदूत छेदेल. ह्या छेदन बिंदूला M हे नाव द्या. M हाच AB ह्या रेषेचा मध्यबिंदू असेल. मध्यबिंदू शोधून काढण्यासाठी कंपासमध्ये दिलेल्या रेषेच्या लांबीएवढेच अंतर पाहिजे असा नियम नाही, थोडे कमी अंतर असले तरी चालते. तसेच चापांचे छेदनबिंदू जोडणारी रेषा दिलेल्या रेषेला लंबरुप असते.

कंपासमध्ये AM एवढे अंतर मोजून घ्या, आणि M हा मध्यबिंदू घेऊन एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ

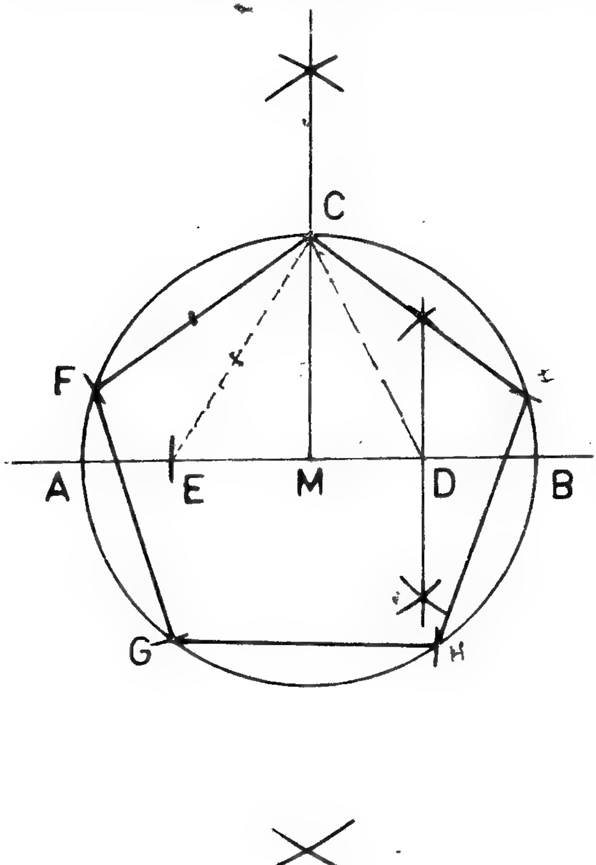
AB ला लंबरुप असलेल्या रेषेला C आणि D ह्या दोन बिंदूत छेदेल.

A,B,C आणि D ह्या बिंदूमधून AM एवढ्याच त्रिज्जेची चार अर्धवर्तुळे रेखाटा. ही वर्तुळे अर्ध्यापेक्षा थोडी मोठी असलेली बरी. आपण काढलेली अर्धवर्तुळे चार बिंदूत छेदतात असं तुमच्या लक्षात येईल. हे चार बिंदू सांधलेत की तुम्हाला पाहिजे असलेला चौरस तयार होईल.

Drawing regular pentagon

**नियमीत पंचकोन** : दिसायला आकर्षक, बहुगुणी पण काढायला सर्वात अवघड अशी ही आकृती आहे. नियमति पंचकोनाचे पाचही कोन ७२ अंशाचे असतात.

प्रथम AB ही एक रेषा काढा आणि चौरसाच्या कृतीत दिल्याप्रमाणे तिचा M हा मध्यबिंदू निश्चित करा. कंपासमध्ये AM एवढे अंतर मोजून घ्या. व M हा केंद्रबिंदू घेऊन AM ह्या त्रिज्जेचे एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ M ह्या बिंदूतून जाणाऱ्या लंब रेषेला C ह्या बिंदूत छेदील. रेषा दुभागण्यासाठी वरील पद्धत वापरुन वर्तुळाच्या MB ह्या त्रिज्जेचा D हा मध्यबिंदू निश्चित करा.

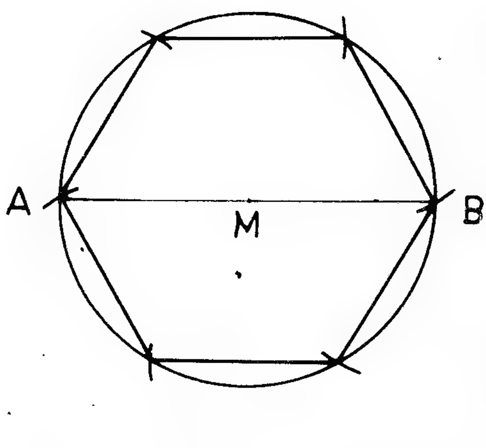



कंपासमध्ये CD एवढे अंतर मोजून घ्या. आणि D हा केंद्रबिंदू मानून

एक चाप काढा. तो वर्तुळाच्या AM ह्या त्रिज्जेला E ह्या बिंदूत छेदील.

**सरतेशेवटी** C हा केंद्रबिंदू कल्पून आणि CE एवढ्या अंतराची त्रिज्जा घेऊन वर्तुळाला F या बिंदूत छेदणारा चाप काढा. CF ही रेषा नियमीत पंचकोनाची एक बाजू असेल. बाकीच्या बाजू निश्चित करण्यासाठी CE हीच त्रिज्जा कायम ठेऊन आणि F हा केंद्रबिंदू घेऊन वर्तुळाला G ह्या बिंदूत छेदणारा चाप काढा. म्हणजे पंचकोनाची FG ही दुसरी बाजू मिळेल. याच पद्धतीने राहिलेल्या तीन बाजू निश्चित करता येतील.

**नियमीत षट्कोन :** अतीशय उपयुक्त आणि काढायला अंत्यत सोपी अशी ही आकृती आहे. ह्या आकृतीचा एक विशेष गुणधर्म असा की तिची एक बाजू परिलिखीत वर्तुळाच्या त्रिज्जेएवढीच असते. षट्कोनाचे सर्व कोन 120 अंशाचे असतात.

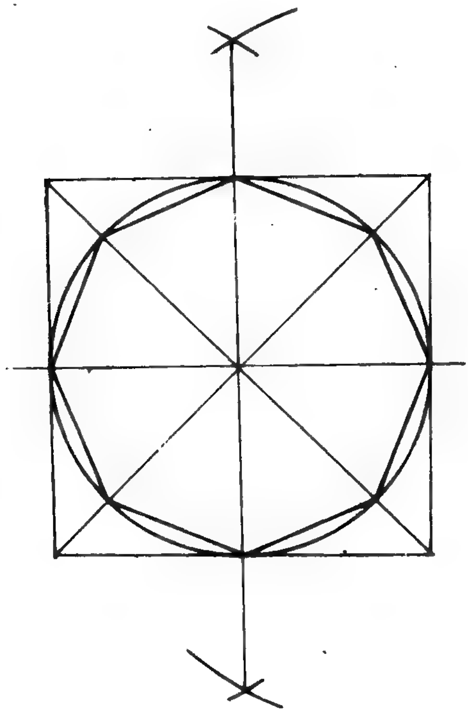



AB ह्या रेषेचा M हा मध्यबिंदू शोधून काढा, आणि तुम्हाला पाहिजे असेल त्या त्रिज्जेचे वर्तुळ रेखाटा. नंतर त्रिज्जा तीच ठेवून आणि अनुक्रमे A आणि B हे केंद्रबिंदू कल्पून वर्तुळाला छेदणारे चार चाप काढा. अशा प्रकारे A आणि B हे दोन बिंदू धरुन वर्तुळावर एकंदर सहा बिंदू मिळतील. हे सहा बिंदू अनुक्रमाने जोडले की तुम्हाला पाहिजे असलेला षट्कोन तयार होईल.

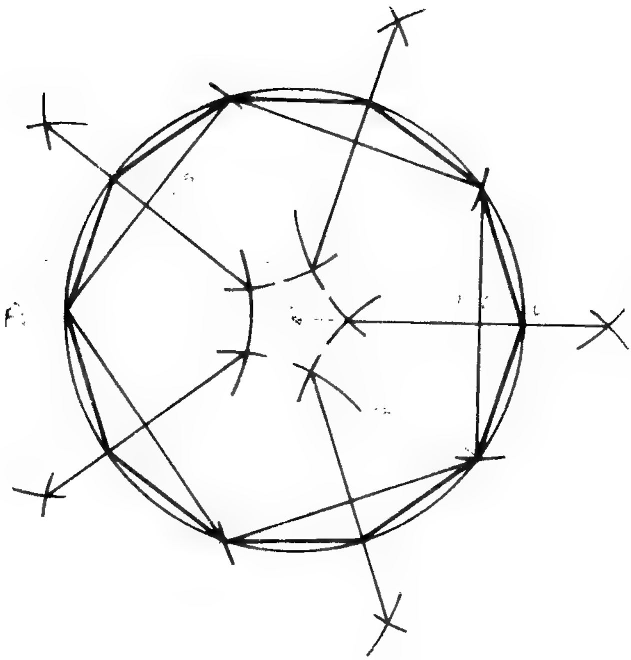
चौरस, नियमीत पंचकोन आणि षट्कोन ह्या मूलभूत बहुभुजाकृती आहेत असे म्हणायला हरकत नाही. त्यांच्यापासून अनुक्रमे अष्टकोन, दशकोन आणि द्वादशकोन ह्या बहुभुजाकृती सहजपणे रेखाटता येतात.

**अष्टकोन :** तुम्ही रेखाटलेल्या चौरसाचे समोरासमोरचे बिंदू जोडून दोन कर्ण काढून घ्या. आणि नंतर AM एवढ्याच त्रिज्जेचे व M हा केंद्रबिंदू

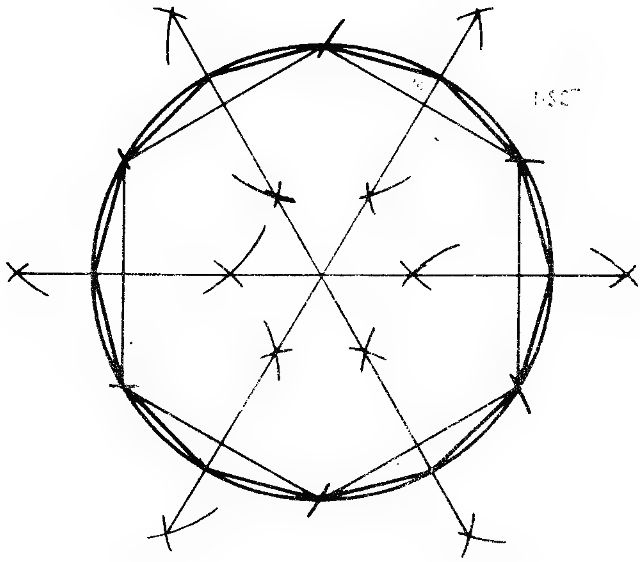
असलेले एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ कर्णांना एकूण आठ बिंदूमध्ये छेदेल. हे आठ बिंदू अनुक्रमे सांधले की पाहिजे असलेला अष्टकोन तयार होईल.



**दशकोन :** दशकोनासाठी पंचकोन ही पायाभूत आकृती आहे. तुम्ही काढलेल्या पंचकोनांच्या पाचही बाजू चापांच्या सहाय्याने विभागा. चापांना सांधणाऱ्या रेषा परिलिखीत वर्तुळाला पाच ठिकाणी छेदतील. हे पाच छेदन बिंदू आणि पंचकोनाचे पाच बिंदू मिळून वर्तुळावर एकंदर 10 बिंदू मिळतील, तेच क्रमाने सांधले की तुम्हाला हवा असलेला दशकोन निर्माण होईल.



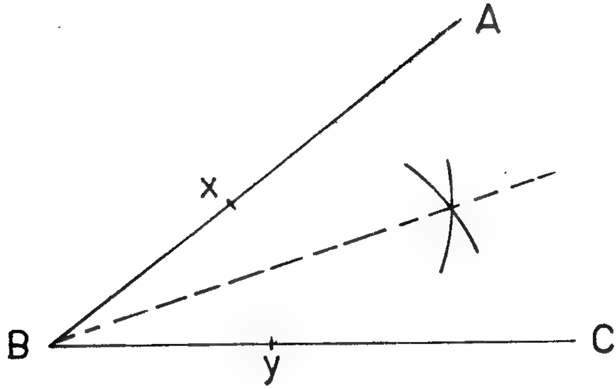
**द्वादशकोन :** षट्कोन ही द्वादशकोनासाठी पायाभूत आकृती आहे. वरीलप्रमाणेच षट्कोनाच्या सहाही बाजू चापांच्या सहाय्याने विभागा. चापांना साधणाऱ्या रेषा वर्तुळाला सहा ठिकाणी छेदतील. हे सहा बिंदू व षट्कोनाचे सहा बिंदू क्रमाने सांधले की हवा असलेला द्वादशकोन तयार होईल.



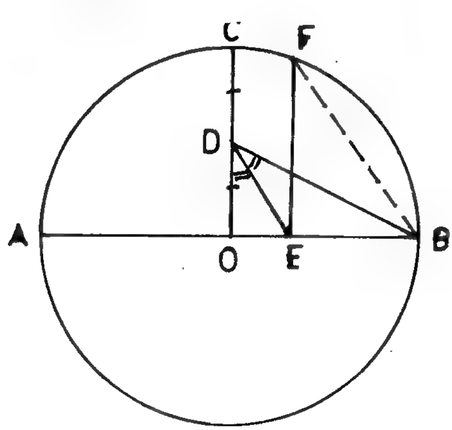
## २ : रिचमॉंडचा पंचकोन

नियमीत पंचकोन ही अनेक सूप्त गुणधर्म असलेली भूमितीमधील एक महत्त्वाची आकृती आहे. त्यामुळे नियमीत पंचकोन काढण्याच्या एकापेक्षा जास्त पद्धती माहीत असलेल्या बऱ्या. आपण पाहिलेली पहिली पद्धत नाही म्हटंल तरी जरा अवघडच आहे. १८९३ साली रिचमॉंड नावाच्या एका गणितज्ञाने नियमीत पंचकोन काढण्याची एक सोपी पद्धत शोधून काढली.

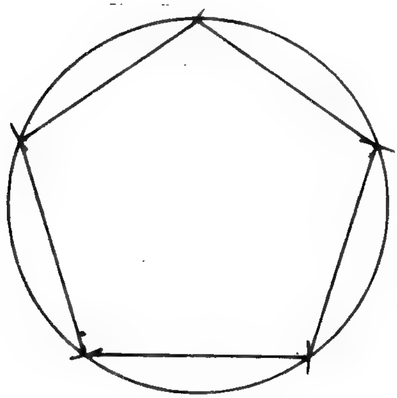
रिचमॉंडच्या पद्धतीसाठी तुम्हाला कोनाचा दुभाजक कसा काढायचा याची माहिती असणे आवश्यक आहे. समजा ABC हा तुम्हाला दिलेला कोन आहे, त्याच्या AB आणि BC ह्या बाजूवर अनुक्रमे BX आणि BY ही समान अंतरे मोजून घ्या. नंतर कंपासमध्ये पुरेसे अंतर ठेवून X आणि Y ह्या बिंदूमधून परस्परांना छेदणारे दोन चाप काढा. चापांचा छेदन बिंदू B ह्या बिंदूला जोडा. म्हणजे जी रेषा मिळेल ती ABC हा कोन बरोबर दोन भागात दुभागेल.




रिचमाँडच्या पद्धतीने पंचकोन काढण्यासाठी तुम्हाला योग्य वाटेल त्या व्यासाचे एक वर्तुळ काढून घ्या. समजा AB हा त्या वर्तुळाचा व्यास असून, O हा त्याचा केंद्रबिंदू आहे. वर्तुळाच्या केंद्रामधून AB ह्या व्यासाला काटकोन करणारी व वर्तुळाच्या परिघाला C ह्या बिंदूत छेदणारी OC ही रेषा काढा. प्रथम OC ह्या रेषेचा D हा मध्यबिंदू निश्चित करुन तो B बरोबर सांधा. तुम्हाला BDO हा एक कोन मिळेल. वर दिलेल्या कृतीचा उपयोग करा आणि BDO दुभाजक मिळवा तो ज्या बिंदूत AB ह्या रेषेला छेदेल त्या बिंदूला E हे नाव द्या. E बिंदूमधून AB ला काटकोन करणारी व वर्तुळाच्या परिघाला F ह्या बिंदूत छेदणारी EF ही रेषा काढा. F आणि B ह्या बिंदूमधील अंतर हेच पंचकोनाच्या एका बाजूएवढे असते.



कंपासमध्ये BF एवढे अंतर घेऊन, वर्तुळाच्या परिघावरील कोणत्याही बिंदूपासून प्रारंभ करुन, परिघाला छेदणारे पाच चाप काढा. ह्या चापांचे छेदन बिंदू अनुक्रमाने जोडले की नियमीत पंचकोन तयार होईल.

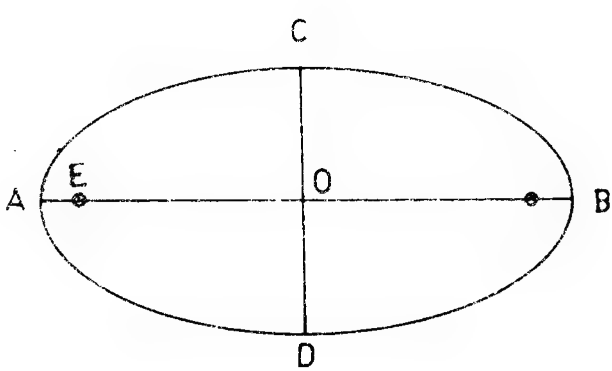


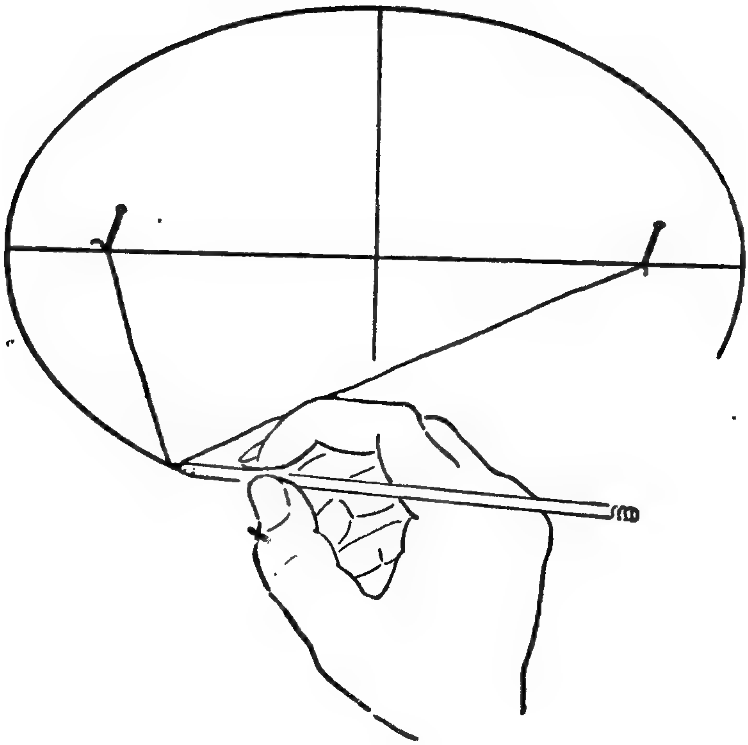
## ३ : दोरा दीर्घवर्तुळ कोरतो

सूर्याभोवती सर्व ग्रह दीर्घवर्तुळाकार मार्गाने भ्रमण करतात. ग्रहांच्या भोवती भ्रमण करणाऱ्या उपग्रहांचा मार्गही दीर्घवर्तुळाकृती असतो. पृथ्वी भोवती सध्या सहस्त्रावधी कृत्रिम उपग्रह भ्रमण करीत आहेत. त्या सर्वांचा मार्ग दीर्घवर्तुळाकृतीच आहे. आपल्या आकाशगंगेत अनेक जोड तारे आहेत, तेही परस्परांभोवती दीर्घवर्तुळाकार मार्गानेच रिंगण घालतात. अर्थातच ज्यांना खगोलशास्त्राचा अभ्यास करायचा आहे त्यांना दीर्घवर्तुळाची चांगली माहिती असणे आवश्यक आहे.

दीर्घवर्तुळाचे दोन अक्ष असतात, त्यातील मोठ्या अक्षाला बृहद्अक्ष व लहान अक्षाला लघुअक्ष अशी नावे आहेत. हे दोन अक्ष परस्परांना काटकोनात छेदतात. त्यांचा हा छेदनबिंदू दीर्घवर्तुळाचा केंद्रबिंदू असतो. बृहद्अक्षावर केंद्रबिंदूपासून समान अंतरावर जे दोन बिंदू असतात. त्यांना नाभी किंवा फोकस असे नाव आहे. केंद्रबिंदूपासून नाभीचे अंतर आणि अर्धबृहद्अक्ष यांच्या गुणोत्तराला एक्सेंट्रिसिटी किंवा विमध्यता असे म्हणतात. दीर्घवर्तुळाचा आकार विमध्यतेच्या किमतीवर अवलबून आहे. विमध्यता अगदी लहान असेल तर दीर्घवर्तुळ जवळ जवळ वर्तुळाकृती असते व विमध्यता फार जास्त, पण एकपेक्षा कमी असेल तर दीर्घवर्तुळ अतीदीर्घ असते. सोबतच्या आकृतीप्रमाणे विमध्यता $= \frac{OE}{OA}$

दीर्घवर्तुळ रेखाटण्याची एक अतीशय सोपी पद्धत आहे. त्यासाठी दोन चांगल्या टांचण्या किंवा चुका, एक दोरा व एक पेन्सिल एवढ्याच साधनांची आवश्यकता आहे.



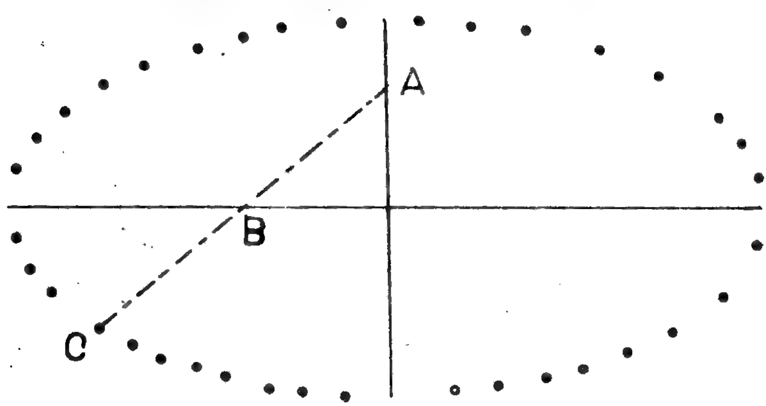


सपाट पृष्ठावर एक कागद ठेवून त्यावर योग्य अंतराने दोन टांचण्या किंवा चुका घट्ट बसवा. जोड दोऱ्याची लांबी चुकांमधील अंतरापेक्षा जास्त घेऊन दोऱ्याला गाठ मारा. नंतर दोऱ्यामध्ये पेन्सिलचे टोक ठेवून तो ताणा, म्हणजे दोऱ्याचा एक त्रिकोण तयार होईल. दोऱ्यामधील ताण कायम ठेवून आणि तो नेहमी चुकांच्या संपर्कात आहे असे पाहून पेन्सिल चुकांच्या सभोवती फिरवा. आपोआप एक दीर्घवर्तुळ कागदावर उमटू लागेल. दीर्घवर्तुळाचा आकार, चुकांमधील अंतर व जोड दोऱ्याची लांबी यावर अवलंबून राहील. ह्या कृतीमधील चुका दीर्घवर्तुळाच्या नाभी दर्शवतात.

## ४ : ट्रॅमेलचे दीर्घवर्तुळ

हातात कंपास असला की सहजपणे वर्तुळ रेखाटता येतं, पण दीर्घवर्तुळ काढण्यासाठी नुसत्या कंपासने भागत नाही. त्यासाठी वेगळयाच पद्धती वापराव्या लागतात. एक साधी पट्टी जवळ असेल तर दीर्घवर्तुळ काढता येईल काय? ट्रॅमेल नावाच्या एका गणितज्ञाने वरवर अशक्य वाटणारी ही गोष्ट सहजपणे करुन दाखविली.

ट्रॅमेलच्या पद्धतीने दीर्घवर्तुळ रेखाटण्यासाठी बृहद् आणि लघु अक्ष काढून घ्या. दीर्घवर्तुळाचे हे दोन अक्ष परस्परांशी 90 अंशाचा कोन करतात व परस्परांना दुभागतात ही गोष्ट लक्षात ठेवा. समजा तुम्ही बृहद् व लघु अक्षांची लांबी अनुक्रमे 10 व 5 सेन्टीमीटर निवडलीत तर ह्या अक्षांच्या अर्ध्याभागांची लांबी अनुक्रमे 5 व 2.5 सेन्टीमीटर असेल. तुमच्या जवळ असलेल्या छोट्या पट्टीवरील शून्य सेन्टीमीटरच्या रेषेला A, 2.5 सेन्टीमीटरच्या रेषेला B व 5 सेन्टीमीटरच्या रेषेला C अशी नावे द्या.

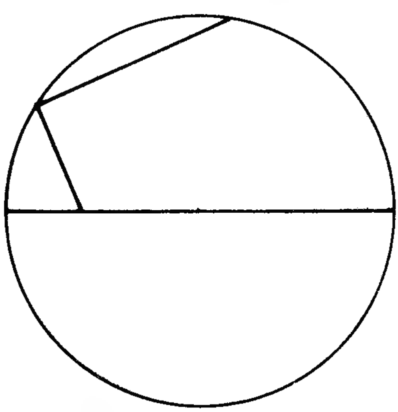



पट्टीवरील A हा बिंदू बरोबर लघु अक्षावर ठेवा आणि पट्टी योग्य प्रकारे फिरवून B हा बिंदू बृहद् अक्षावर आणा. म्हणजे C हा बिंदू आपोआप दीर्घवर्तुळाच्या परीघावर येईल. C ह्या बिंदूची जागा नोंदवून ठेवा. लघुअक्षाच्या वर आणि खाली तसेच दोन्ही बांजूवर A प्रमाणे अनेक बिंदू निवडून पुन्हा पुन्हा वर दिलेल्या कृतीप्रमाणे C ह्या बिंदूची नोंद करा.

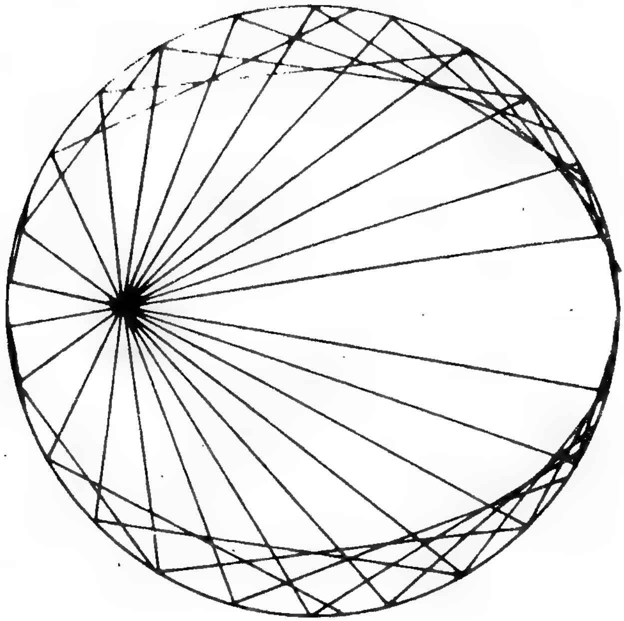
तुम्हाला आपोआप दीर्घवर्तुळ मिळेल. अर्थात ते अनेक बिंदूनी तयार झालेले असेल. हे सर्व बिंदू उत्तम प्रकारे जोडलेत की तुम्हाला हवे असलेले दीर्घवर्तुळ तयार होईल.

## ५ : दीर्घवर्तुळाचा आभास

वर्तुळामध्ये विशिष्ट पद्धतीने अनेक रेषा काढल्या तर त्या रेषांचे आवरण दीर्घवर्तुळाचा आभास निर्माण करु शकते. त्यासाठी कंपासाच्या साहाय्याने जरा मोठ्या व्यासाचे एक वर्तुळ काढा. तुम्ही काढलेल्या वर्तुळाच्या व्यासावर केंद्रापासून काही अंतरावर डावीकडे किंवा उजवीकडे एक बिंदू निवडा. दीर्घवर्तुळाच्या दृष्टीने हा बिंदू महत्त्वाचा आहे. इंग्रजीत ह्या बिंदूला 'फोकस' असे नाव आहे. मराठीत त्याचे 'नाभी' असे नामकरण करतात. कोणत्याही दीर्घवर्तुळाला केंद्रापासून समान अंतरावर असे दोन बिंदू असतात. पृथ्वी सूर्याभोवती दीर्घवर्तुळाकार मार्गाने भ्रमण करते. सूर्य नेहमी ह्या दीर्घवर्तुळाचा एका नाभीपाशी असतो.



आता वर्तुळाच्या परीघावर एक बिंदू निवडा. तो तुम्ही व्यासावर निवडलेल्या बिंदूशी म्हणजेच नाभीशी जोडून टाका. जी रेषा मिळेल तिला पहिल्या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे काटकोन करणारी दुसरी रेषा काढा. वर्तुळाच्या परिघावरील अनेक बिंदूसाठी याच कृतीची पुनरावृत्ती करा. ह्या सर्व काटकोनातील रेषांचा एकत्रित परिणाम लवकरच तुम्हाला दिसू लागेल. ह्या सर्व रेषांचे आवरण दीर्घवर्तुळाचा आभास निर्माण करील.

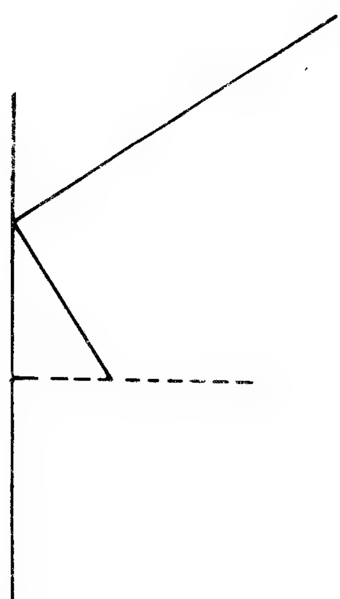


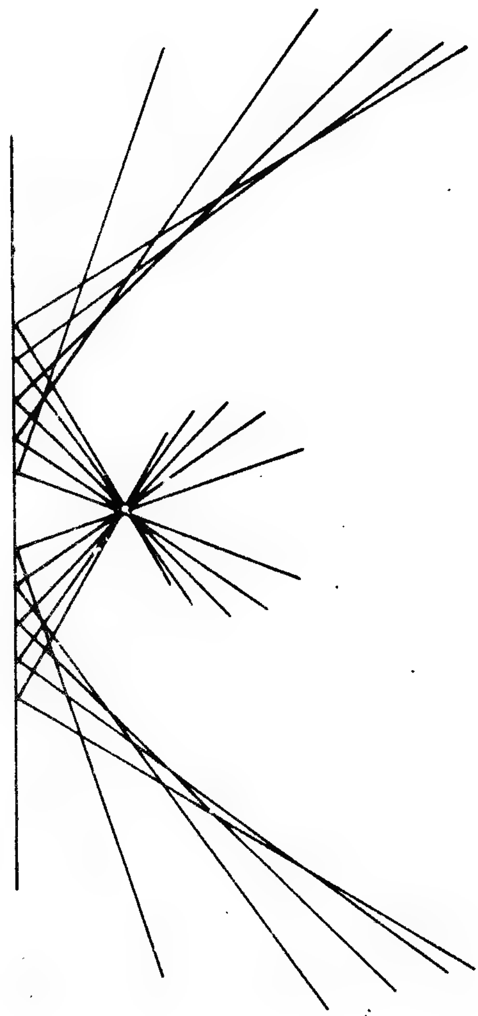
## ६ : काटकोनी रेषा अन्वस्त रेखाटतात

अन्वस्त ही विज्ञानात पदोपदी उपयोगी पडणारी आणखी एक आकृती आहे. अनेक धूमकेतू सूर्याभोवती दीर्घवर्तुळाकार मार्गाने भ्रमण करीत असले तरी काही धूमकेतू मात्र अन्वस्त मार्गाने सूर्याजवळ येतात. एकदा सूर्याला भेट दिली की हे धूमकेतू पुन्हा सूर्याकडे फिरकत नाहीत. ते अफाट अवकाशात कायमचे निघून जातात. कित्येक कंपयमान वस्तूंची गतीजन्य आणि स्थितीजन्य ऊर्जा अन्वस्ताप्रमाणे बदलते. साधा लंबक हे त्याचे उत्तम उदाहरण आहे. बहुधा ज्या ज्या गोष्टींची विशिष्ट नियमाने पुनरावृत्ती होते, त्यांची ऊर्जा अन्वस्ताप्रमाणेच बदलते.

अन्वस्त रेखाटणे हे तसे कौशल्याचेच काम आहे. अनेक बिंदू वक्र रेषांनी जोडूनच बहुधा अन्वस्त तयार करावा लागतो. विशिष्ट प्रकाराने अनेक रेषा रेखाटल्या तर त्यांचे आवरण अन्वस्ताचा आभास निर्माण करु शकते. ह्या तत्वावर आधारलेली एक साधी पद्धत आपल्याला पहायची आहे.

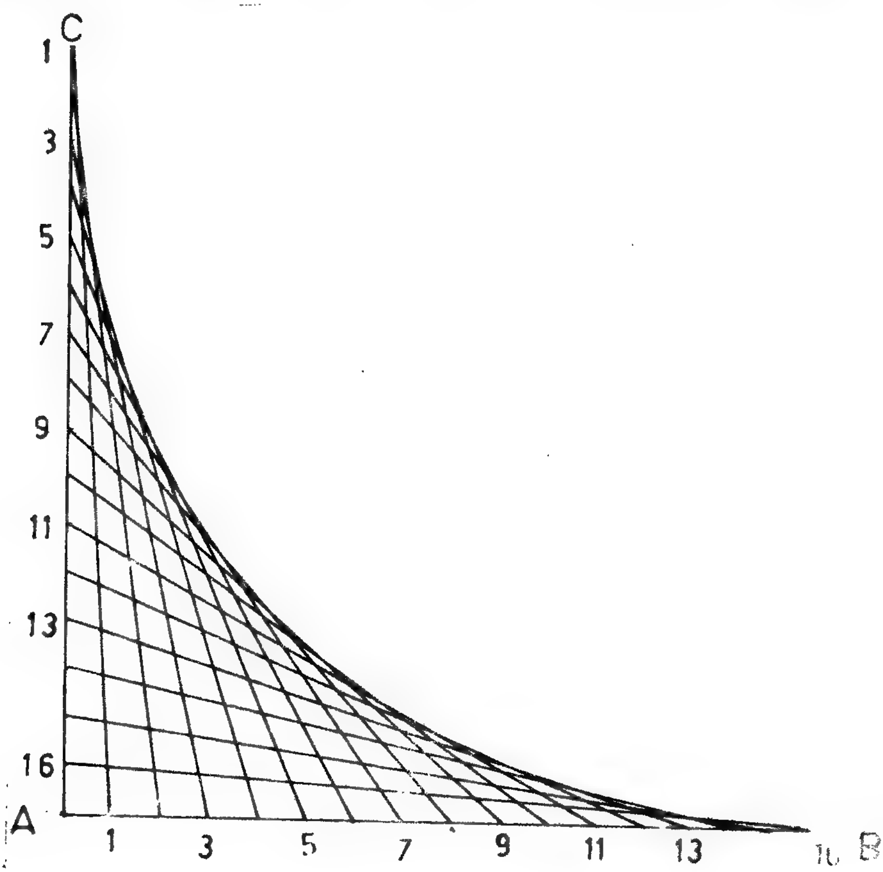
प्रथम एक सरळ उभी रेषा काढून घ्या. तिच्या मध्यापासून काही अंतरावर एक बिंदू निवडा. हाच बिंदू आपल्या अन्वस्ताचा आकार ठरवील. अन्वस्ताच्या परिभाषेत ह्या बिंदूला फोकस किंवा नाभी असे नाव आहे. तुम्ही काढलेल्या उभ्या रेषेवर मध्यबिंदूपासून वर किंवा खाली कोणताही एक बिंदू निवडा आणि तो सरळ रेषेने नाभीशी जोडून टाका. नंतर ह्या रेषेला काटकोन करणारी एक रेषा काढा. ह्याच कृतीची पुनरावृत्ती उभ्या रेषेवरील अनेक बिंदूसाठी करा म्हणजे त्या सर्व रेषांचे आवरण अन्वस्ताचा आभास तुमच्या डोळ्यासमोर उभा करील.



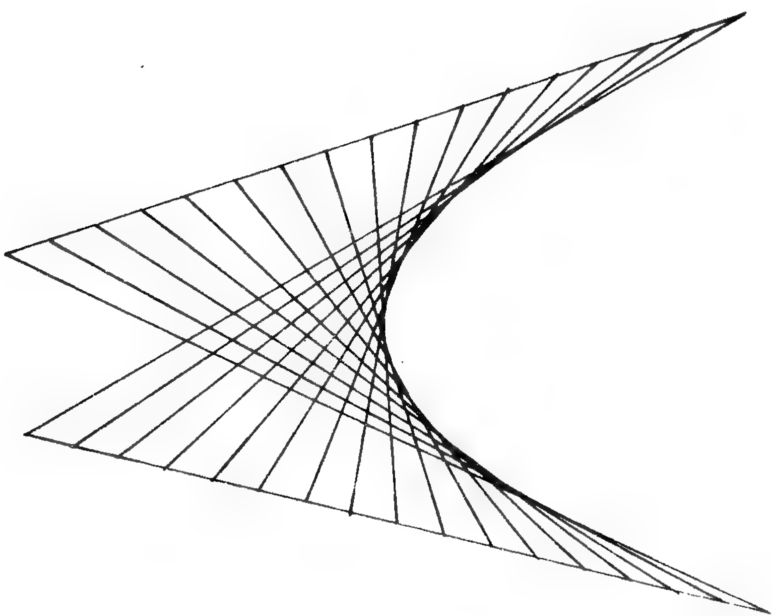


### ७ : आभासी अन्वस्त

एखाद्या शंकूला निरनिराळ्या कोनात छेद दिले की आपल्याला वर्तुळ, दीर्घवर्तुळ, अन्वस्त आणि अपास्त अशा चार प्रकारच्या आकृत्या मिळतात. ह्या चार आकृत्यांचा अभ्यास ही गणिताची एक महत्त्वपूर्ण शाखा आहे. त्याला 'कोनिक्स' असं नाव आहे. अन्वस्त आणि अपास्त ह्यांना इंग्रजीमध्ये अनुक्रमे पॅराबोला आणि हायपरबोला अशी नावे आहेत. ह्या दोन आकृत्या काढणं जरा अवघडच काम आहे. विशेषतः अन्वस्त ही आकृती एका सोप्या पद्धतीने सहजपणे उपलब्ध होऊ शकते. वस्तुतः अनेक रेषांच्या विशिष्ठ कोनांमुळे जे आवरण निर्माण होते ते अन्वस्तासारखे दिसते.

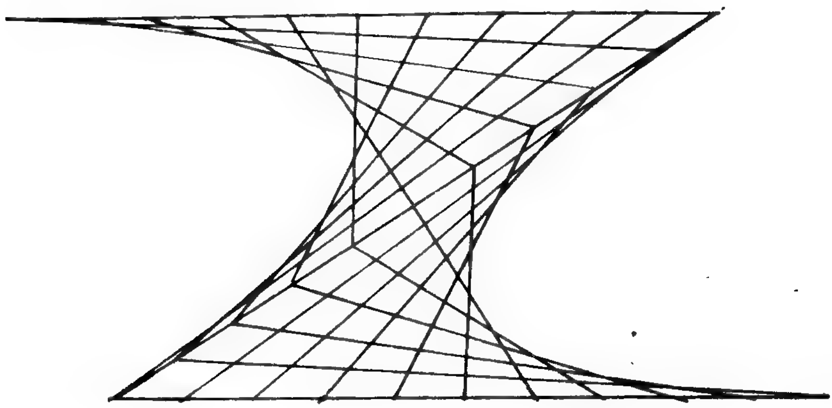


AB आणि AC ह्या परस्परांना काटकोनात असणाऱ्या दोन-रेषा काढून घ्या. नंतर ह्या रेषांचे समान विभाग पाडा. जेवढे विभाग जास्त तेवढे रेषांमुळे निर्माण होणारे आवरण हुबेहुब अन्वस्तासारखे दिसेल. आता रेषांच्या विभागांना उलट्या दिशेत क्रमांक द्या. AB ह्या रेषेवर A पासून B पर्यंत विभागाचे क्रमांक 1, 2, 3, अशा प्रकारे वाढत जातील तर AC ह्या रेषेवर C पासून A पर्यंत क्रमांकांमध्ये वाढ होत जाईल. रेषांच्या विभागांना क्रमांक देऊन झाले की समान क्रमांकाचे विभाग रेषांच्या सहाय्याने जोडून टाका. ह्या रेषांचे आवरण आपोआप अन्वस्त निर्माण करील.



दोन रेषा काटकोनात असताना निर्माण होणाऱ्या अन्वस्ताची वक्रता कमी असते. जास्त वक्रतेचा अन्वस्त हवा असेल तर दोन रेषा स्वतंत्रपणे काढायला हव्यात. त्यांचेमधील कोन आपल्याला किती वक्रता हवी यावर अवलंबून राहील.

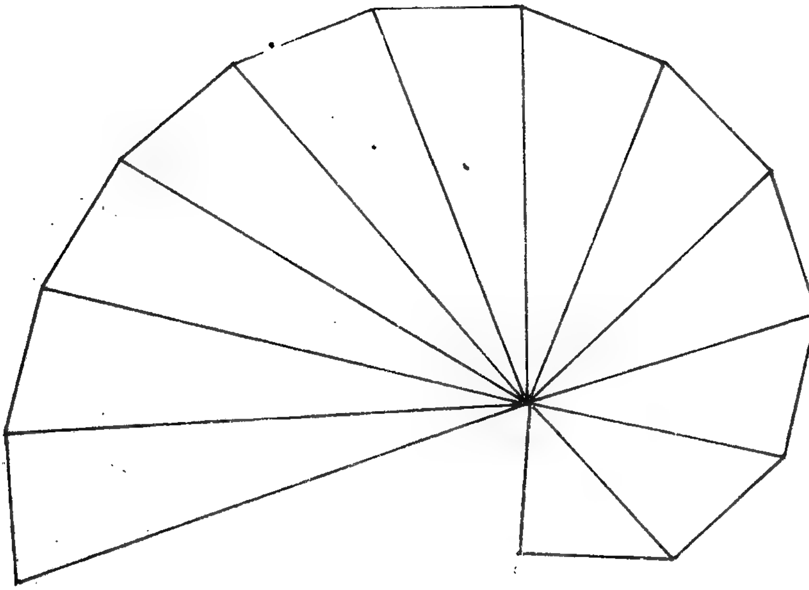
पुढे दिलेल्या आकृतीत वरील पद्धतीने काढलेल्या अन्वस्तांच्या सहाय्याने निर्माण होणारी एक नक्षी दिली आहे. आकृतीमधील कर्ण रेषेची लांबी समांतर रेषांएवढीच आहे, याची मात्र नोंद घ्या.



**८ : काटकोन त्रिकोण सर्पिल काढतो.**

भूमितीमधील अनेकविध आकृत्यांपैकी अगदी वेगळी आणि सौंदर्यपूर्ण आकृती म्हणून सर्पिल ह्या आकृतीकडे बोट दाखविता येईल. सर्पिल रचना निसर्गातही अनेक ठिकाणी पहायला सापडते. आपल्या आकाशगंगेचे बाहू सर्पिल आकाराचे आहेत. अनेक झाडांच्या फांदीवरील पानांची रचना सर्पिल असते. अननसावरील खवले सर्पिल आकारात रचनाबद्ध झालेले असतात. सूर्यफुलावरील दाण्यांची रचना सर्पिल असते. तुमच्या घरातील कासव छाप अगरबत्ती सर्पिल आकाराची आहे. दिवाळीत तुम्ही भुईचक्रे उडविता त्यामधून सर्पिल दिशेत ठिणग्या बाहेर उसळतात.

सर्पिल आकृत्यांचेही अनेक प्रकार आहेत. त्याचं रेखाटन करणं हे कौशल्याचंच काम आहे. चित्रकलेत हातखंडा असणारी व्यक्तीच उत्कृष्ट सर्पिल आकृती काढू शकेल. संगणकही पाहिजे तशी सर्पिल आकृती रेखाटू शकतो. चित्रकलेचं अंग नसलं तरी तुम्हीही अगदी सुलभ रितीने सर्पिल आकृती रेखाटू शकाल. त्यासाठी तुमच्याकडे लहानशी पट्टी असली तर बस्स!



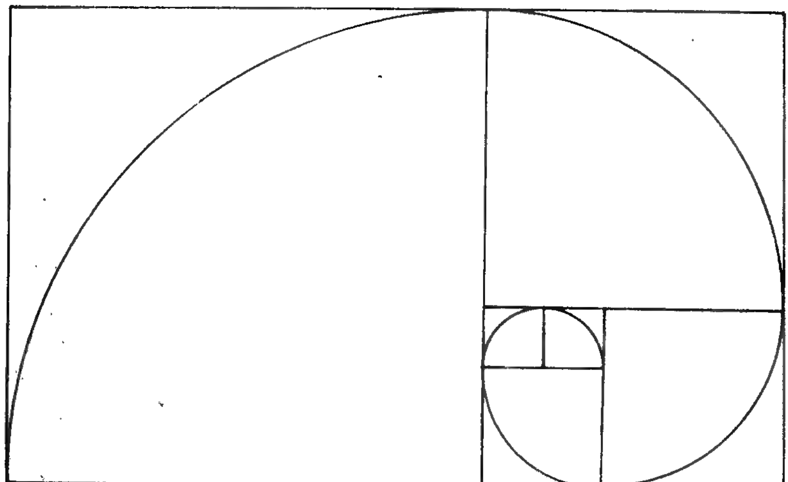
प्रथम एक लहान आकाराचा काटकोन त्रिकोण काढून घ्या. ह्या काटकोन त्रिकोणाचा शिरोकोन व पाया जेवढा लहान तेवढी तुमची सर्पिल आकृती उत्तम असेल. आता मूळ काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ही उभी बाजू आहे असे समजून दुसरा काटकोन त्रिकोण काढा. फक्त त्याचा पाया व शिरोकोन मूळ काटकोन त्रिकोणाएवढाच हवा. पुन्हा दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ही उभी बाजू समजून व तोच शिरोकोन व पाया घेऊन तिसरा काटकोन त्रिकोण काढा. अशाप्रकारे एकामागोमाग एक असे काटकोन त्रिकोण काढत चला. तुम्हाला पाहिजे असलेली सर्पिल आपोआप तुमच्या कागदावर उमटू लागेल.

## ९ : सुवर्ण आयतात सर्पिल

काटकोन त्रिकोणांचा उपयोग करुन सर्पिल कशी काढायची हे आपण पाहिले. परंतू त्या सर्पिलमधील दोष तुमच्या चटकन् लक्षात आला असेल. तिची वक्रता अचुक नव्हती. परीपूर्ण वक्रता असलेली सर्पिल काढण्यासाठी जरा अवघड पद्धत वापरावी लागेल. आपली ही पद्धत एका विशिष्ट गुणोत्तरावर अवलंबून आहे. ह्या गुणोत्तराला इंग्रजीत 'गोल्डन रेशो' असे म्हणतात. मराठीत त्याचं सुवर्णगुणोत्तर असं नामकरण करायला हरकत नाही.

सुवर्णगुणोत्तराची अचुक किंमत आहे, 1.618033989 पण व्यवहारासाठी 1.6 ही किंमत आपण गृहीत धरणार आहोत. सुवर्णगुणोत्तराचे अनेक आश्चर्यकारक गुणधर्म आहेत. ह्या ठिकाणी आपण या गुणोत्तराचा केवळ भूमितीसाठीच उपयोग करुन घेणार आहोत. आपल्याला प्रथम एक सुवर्णआयत काढायचा आहे. ज्याच्या लांबी व रुंदीचे गुणोत्तर 1.6 असते. अशा आयताला सुवर्णआयत या नावाने ओळखतात. उदाहरणार्थ 8 सेन्टीमीटर लांबी आणि 5 सेन्टीमीटर रुंदी, किंवा 13 सेन्टीमीटर लांबी व 8 सेंटीमीटर रुंदी, हे सुवर्णआयत या संज्ञेला प्राप्त होतील. अर्थात तुम्हाला कोणतीही लांबी व रुंदी निवडता येईल, मात्र त्यांचे गुणोत्तर 1.6 हवे.

सुवर्णआयत काढून झाला की त्याच्या लांबीवर रुंदी एवढे अंतर मोजून आयताचे चौरस व आयत असे दोन भाग करा. उदाहरणार्थ तुमचा सुवर्णआयत 13 X 8 सेन्टीमीटरचा असेल तर 8 X 8 सेन्टीमीटरचा चौरस व 8 X 5 सेन्टीमीटरचा आयत असे दोन भाग पडतील. तुम्हाला मिळणारा हा आयत सुवर्णआयत आहे हे लक्षात ठेवा. पुन्हा त्याचे 5 X 5 चा चौरस 5 X 3 चा आयत असे दोन भाग करा. पुन्हा एकदा तुम्हाला सुवर्णआयत मिळाला आहे. अशाप्रकारे अनुक्रमाने मिळणाऱ्या आयतांचे पुन्हा पुन्हा चौरस व आयत असे भाग करीत रहा. प्रत्येक वेळी तुम्हाला सुवर्णआयत मिळत जाईल. सरतेशेवटी तुम्हाला विभागणी करणे शक्य होणार नाही. खरं तर सर्पिल काढण्यासाठी मूळ सुवर्णआयताचे चार पाच वेळा विभाग पाडले तरी पुरेसे आहे.



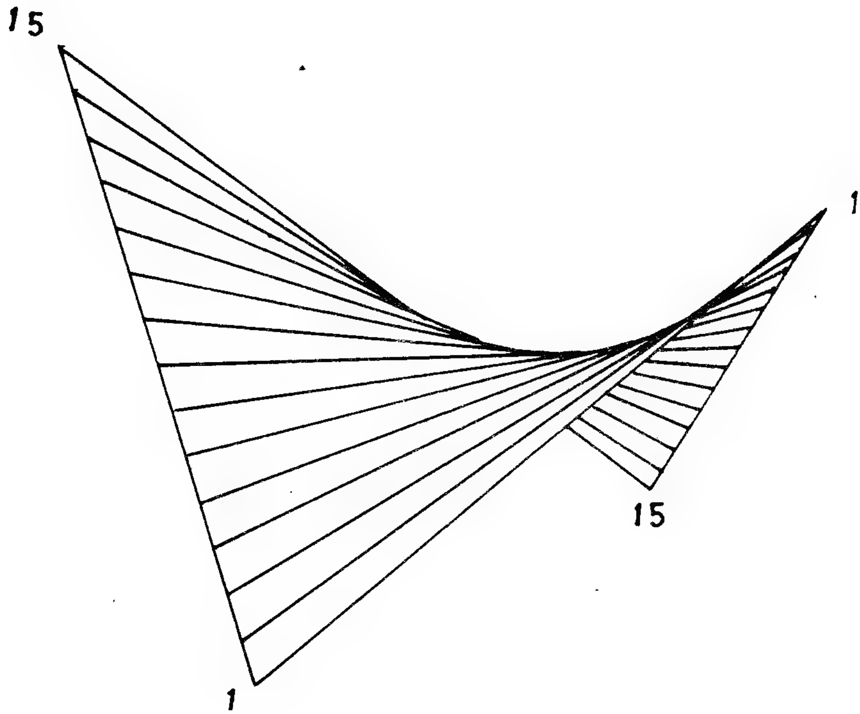
सुवर्णआयताच्या विभागणीची क्रिया पूर्ण झाली की सर्वात मोठ्या चौरसाच्या एका विशिष्ट कोनावर कंपासचे टोक ठेवून, चौरसाच्या लांबीएवढ्या त्रिज्जेचा एक चाप काढा. हा चाप चौरसाच्या दोन बाजूंना स्पर्श करणारा असला पाहिजे. हीच पद्धत पुढील सर्व चौरसांसाठी वापरा. प्रत्येक पुढील चौरसासाठी त्रिज्जा लहान घ्यावी लागेल. तसेच चाप काढतांना कंपासचे टोक चौरसांच्या विशिष्ट कोनांवरच ठेवावे लागेल. आकृती पूर्ण झाली की सर्व चापांची मिळून परीपूर्ण वक्रता असलेली सर्पिल तयार होईल.

## १० : खोगीर

माणसाला व्यवस्थित बसून दौड करता यावी म्हणून घोड्याच्या पाठीवर एक विशिष्ठ आकाराची चामड्याची बैठक घालण्याचा प्रघात आहे. मराठीत खोगीर तर इंग्रजीत सॅडल् अस त्याचं नाव आहे. आपण ज्या आकृतीचा विचार करणार आहोते ती साधारणपणे खोगीरासारखी दिसते म्हणूनच तिला हे नाव आपण बहाल केलं आहे. ह्या आकृतीचं खरं नाव जरा भयंकर आहे, 'हायपरबोलीक पॅरॅबोलाइड' या नावाने भूमितीमध्ये ती ओळखली जाते.

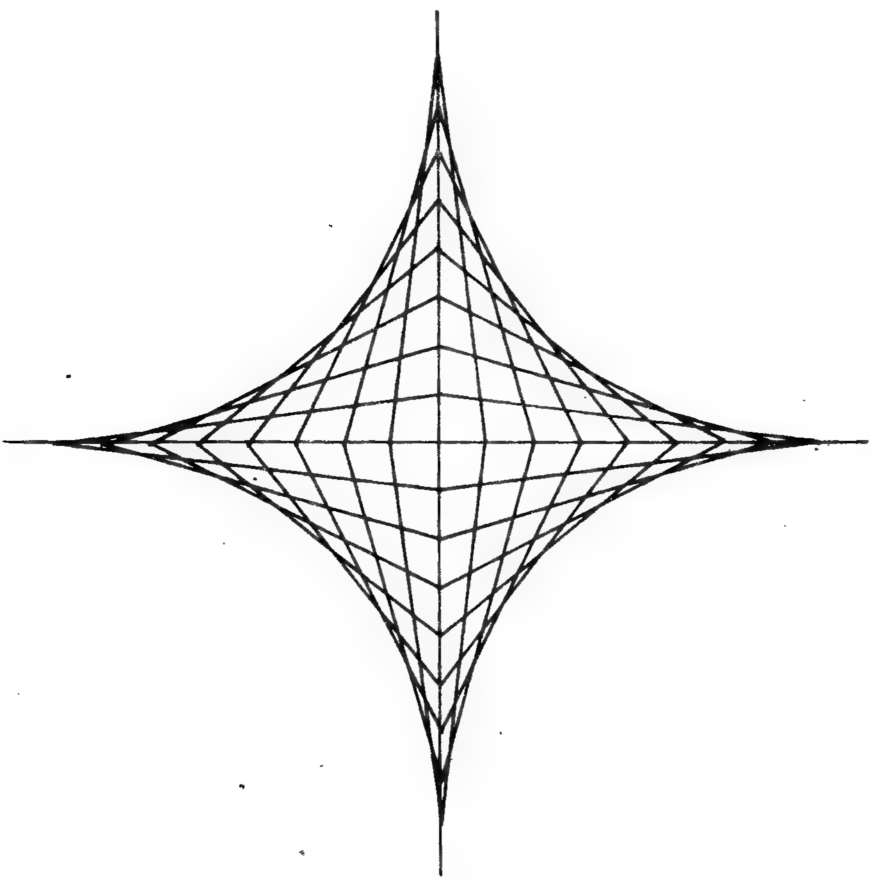
अन्वस्त काढण्यासाठी दोन तिरक्या रेषांवरील समान क्रमांकाचे विभाग आपण जोडले होते. थोड्याफार फरकाने खोगीर रेखाटण्यासाठी तीच पद्धत आपल्याला वापरायची आहे. अन्वस्ताप्रमाणेच काहीतरी कोन असलेल्या दोन रेषा काढा. एका रेषेची लांबी दुसऱ्याच्या दुप्पट आहे याचे मात्र काळजी घ्या. उदाहरणार्थ एक रेषा आठ सेंटीमीटर लांबीची असेल तर दुसरी चार सेंटीमीटर लांबीची काढा. नंतर प्रत्येक रेषेचे समान संख्येत भाग पाडा. मोठ्या रेषेवरील भागंची लांबी लहान रेषेवरील भागांच्या लांबीपेक्षा दुप्पट असणार हे उघड आहे. आता दोन्ही रेषांवरील विभागांना उलट्या दिशेने क्रमांक द्या.

प्रथम दोन्ही रेषांवरील एक क्रमांक जोडा. यापुढे सर्व क्रमांक परस्परांना जोडायचे आहेत, पण लहान रेषेवरुन निघणाऱ्या रेषा, दोन्ही रेषांवरील एक क्रमांक जोडणाऱ्या रेषेपर्यंतच काढा. मोठ्या रेषेवरील क्रमांकावरुन निघणाऱ्या मात्र हळू हळू एकमेकांत मिसळत आहेत असं तुमच्या लक्षात येईल, व त्यांचा एकत्रित परिणाम खोगीरासारखा दिसू लागेल.

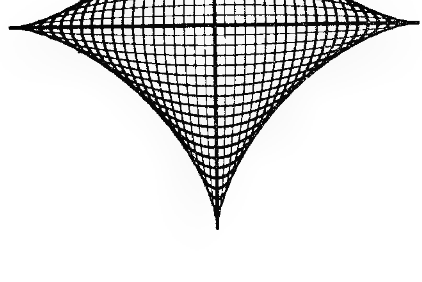

15
1
15
1

## ११ : ॲस्ट्रॉइड

मंगळ आणि गुरु यांच्या कक्षांमध्ये अनेक लहान लहान लघुग्रह सूर्याभोवती भ्रमण करीत असतात त्यांना ॲस्ट्रॉइड असं नाव आहे. भूमितीमधील एका आकृतीला हेच नाव बहाल करण्यात आल आहे. दिसायला अत्यंत आकर्षक अशी ही आकृती आहे. रेषांच्या आवरणाचा उपयोग करुन अन्वस्ताचा आभार कसा निर्माण करता येतो हे आपण पाहिले आहे. ॲस्ट्रॉइड रेखाटण्यासाठी त्याच पद्धतीचा आपल्याला उपयोग करायचा आहे.

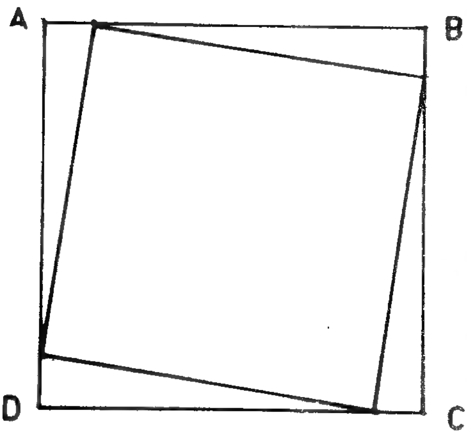


परस्परांना काटकोनात असणाऱ्या व परस्परांच्या मध्यबिंदूमधून जाणाऱ्या दोन समान लांबीच्या रेषा काढा. मध्यबिंदूच्या डाव्या उजव्या आणि वर खाली आपल्याला समान लांबीच्या चार रेषा मिळतील. ह्या चार रेषांचे समान लांबीचे व समान संख्येत विभाग करा. उदाहरणार्थ प्रत्येक भागाची लांबी चार सेंटीमीटर असेल तर अर्धा सेंटीमीटर अंतरावर त्याचे आठ समान विभाग करता येतील. आडव्या रेषेवरील विभागांना मध्यबिंदूपासून डावीकडे व उजवीकडे चढते क्रमांक द्या. त्याचप्रमाणे उभ्या रेषेवरील विभागांना मध्यबिंदूपासून वर आणि खाली उतरते क्रमांक द्या. सरते शेवटी उभ्या व आडव्या रेषांवरील समान क्रमांक रेषांच्या सहाय्याने जोडून टाका. तुम्ही काढलेल्या सर्व रेषांचे आवरण म्हणजेच ॲस्ट्रॉइड नावाची आकृती.



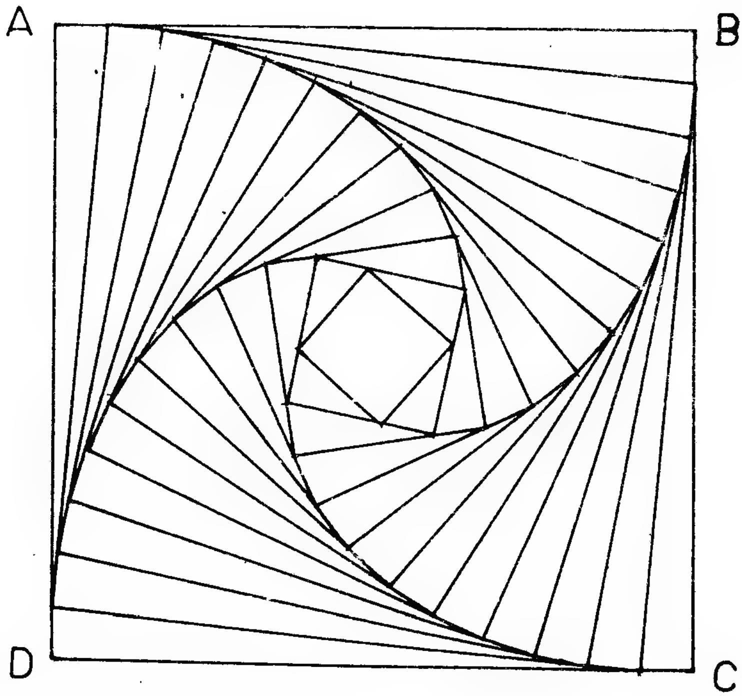
## १२ : पाठलाग

एका चौरसाच्या चार कोपऱ्यावर चार मुलांना उभे करुन नंतर त्यांना चौरसाच्या बाजूंच्या दिशेत धावून परस्परांचा पाठलाग करायला सांगितले तर त्यांच्या धावण्याचा मार्ग कसा असेल? या प्रश्नाचे उत्तर मोठ्या मजेशीर पद्धतीने शोधून काढता येते. त्यासाठी पुढे दिलेली आकृती लक्षपूर्वक पहा व त्याप्रमाणे तुम्ही स्वतः तशी आकृती काढण्याचा प्रयत्न करा. आकृतीमध्ये एका विशिष्ट प्रकाराने अनेक चौरस रेखाटले आहेत. त्यांचा परिणाम म्हणून चौरसाच्या केंद्राच्या दिशेने जाणारे चार वक्र मार्ग दिसतील. पाठलाग करणारे आपले चार मित्र याच वक्राकार मार्गांनी परस्परांचा पाठलाग करतील.

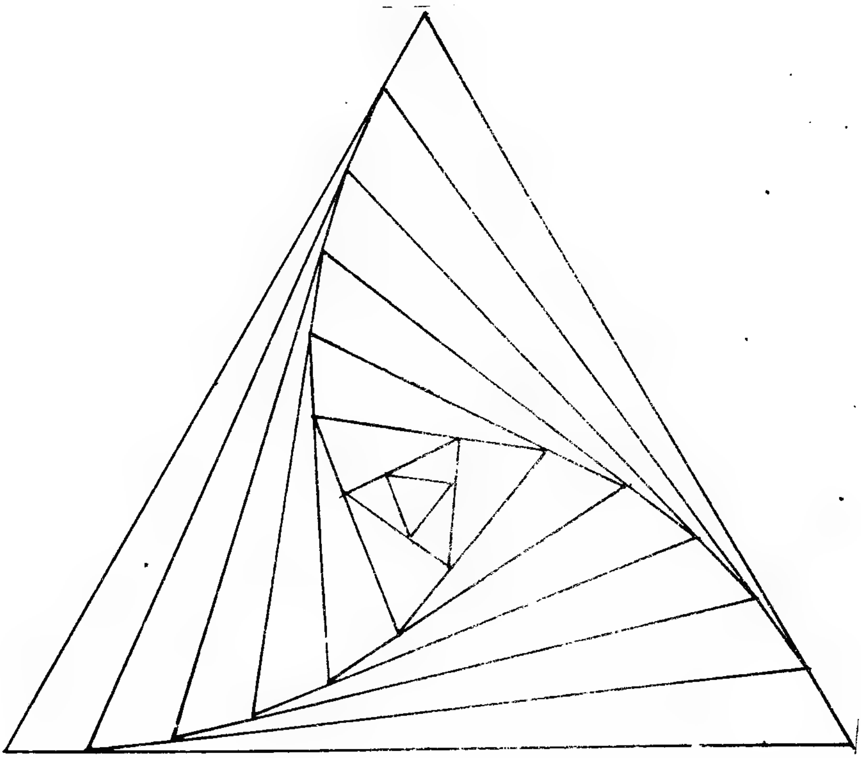



आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे एकात एक चौरस काढण्याची आपली पद्धत फार सोपी आहे. प्रथमतः ABCD हा एक मोठा चौरस काढून घ्या. ह्या चौरसाच्या प्रत्येक बाजूवर A, B, C आणि D ह्या बिंदूपासून समान अंतरावर पहिल्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे चार बिंदू काढा. ह्या बिंदूचे अंतर चौरसाच्या बाजूंच्या तुलनेत लहान असायला हवे. हे चार बिंदू जोडलेत की तुम्हाला पहिल्या चौरसाच्या आत आणखी एक नवीन पण जरा तिरका चौरस मिळेल. ह्या नव्या चौरसाच्या चारही बाजूवर त्याच दिशेत व तेवढेच अंतर मोजून जे चार बिंदू मिळतील ते जोडलेत की आणखी एक आणखी तिरका चौरस मिळेल. नवनवीन चौरस काढण्याची ही क्रिया अशीच चालू ठेवा. प्रत्येक वेळी तुम्हाला अधिकाधिक लहान व अधिकाधिक तिरका चौरस मिळत जाईल. जितक्या लहान चौरसापर्यंत तुम्हाला ह्या क्रियेची पुनरावृत्ती करता येईल

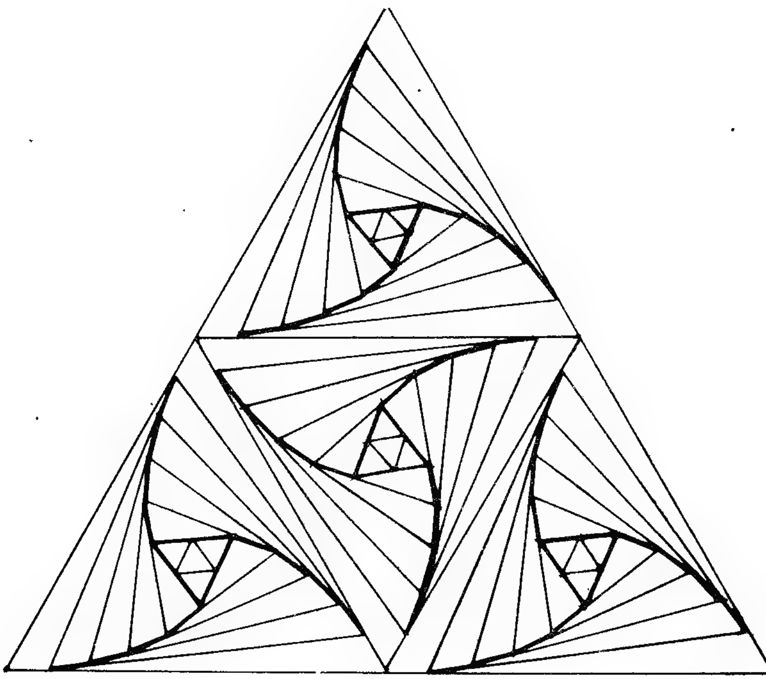
तेवढी करा. आकृतीमध्ये तुम्हाला आपोआप चार वक्र मार्ग दिसू लागतील.




पुढे दिलेल्या आकृतीत प्रारंभी चौरसाऐवजी समभुज त्रिकोण काढला आहे व नंतर वरीलप्रमाणेच एकात एक नवनवीन समभुज त्रिकोण काढले आहेत. या आकृतीत पाठलागाचे तीन वक्र मार्ग दिसतात.

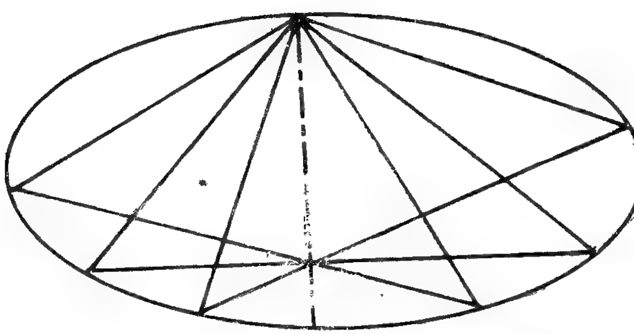


आपण ज्या पद्धतीने एकात एक चौरस आणि त्रिकोण काढले, त्याच पद्धतीचा उपयोग करुन एक अगदी मुलखावेगळी आकृती रेखाटता येईल. प्रथम एक मोठा समभुज त्रिकोण काढून त्याच्या बाजूचे मध्यबिंदू शोधून काढा. हे तीन बिंदू सांधले की मूळ समभुज त्रिकोणाचे चार छोट्या समभुज त्रिकोणात रुपांतर होईल. नंतर प्रत्येक लहान त्रिकोणात वर दिलेल्या कृतीप्रमाणे एकात एक नवनवीन समभुज त्रिकोण काढा. ही आकृती पूर्ण करण्यासाठी तुम्हाला चांगलीच चिकाटी दाखवावी लागेल.



## १२ : दीर्घवर्तुळातील काटकोन त्रिकोण

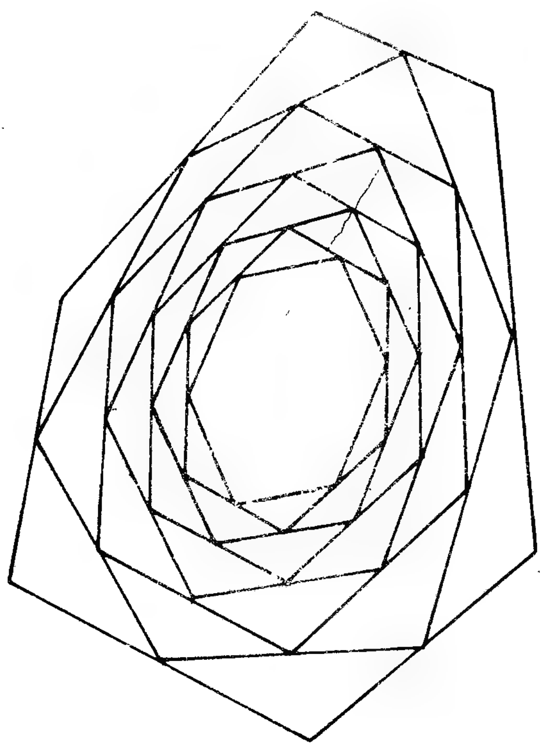
दीर्घवर्तुळ कसं काढायचं हे आता तुम्हाला समजलं आहे. जी पद्धत तुम्हाला सोईची व सोपी वाटेल त्या पद्धतीने कोणत्याही आकाराचे एक दीर्घवर्तुळ रेखाटून घ्या. ह्या दीर्घवर्तुळाच्या परीघावर P हा एक बिंदू निवडा. तो कुठे असावा, ह्याला काहीही नियम नाही. नंतर P ह्या बिंदूपासून परस्परांना काटकोन करणाऱ्या दोन रेषा काढा. त्या दीर्घवर्तुळाला ज्या दोन बिंदूत छेदतील ते बिंदू एका रेषेच्या सहाय्याने सांधा. म्हणजे दीर्घवर्तुळाच्या आत एक काटकोन त्रिकोण तयार होईल. ज्याचा 90 अंशाचा कोन P ह्या




बिंदूपाशी असेल. ह्याच पद्धतीने P ह्या बिंदूपाशी 90 अंशाचा कोन करणारे आणखी तीन चार काटकोन त्रिकोण काढा. काटकोनात असणाऱ्या रेषांची दिशा बदलली की नवीन काटकोन त्रिकोण मिळेल. जसजसे नवनवीन काटकोन त्रिकोण काढाल तसतसे एक महत्त्वाची गोष्ट तुमच्या सहज लक्षात येईल. सर्व काटकोन त्रिकोणांचे कर्ण एकाच बिंदूत परस्परांना छेदतील. तुम्हाला मिळालेला समान छेदन बिंदू P ह्या बिंदूशी सांधा. आकृतीमध्ये ही कृती तुटक रेषांनी दर्शविली आहे. ही विशिष्ट रेषा P ह्या तुम्ही निवडलेल्या बिंदूजवळ दीर्घवर्तुळाच्या परीघाशी 90 अंशाचा कोन करते, असे तुम्हाला आढळेल. दीर्घवर्तुळाचा आकार कसाही आणि केवढाही असो, त्यामध्ये वरील दोन गुणधर्म दिसलेच पाहिजेत. अन्यथा त्या आकृतीला दीर्घवर्तुळ असे नाव देता येणार नाही.

## १४ : एकात एक अनेक बहुभुजाकृती

बहुभुजाकृती नियमीत नसतील, तर त्यांच्यासाठी काही नियम शोधून काढणे कठीणच आहे. किंबहुना अनियमित बहुभुजाकृतींसाठी काही नियमच नसतील असे आपल्याला वाटेल. पण प्रत्यक्षच काय निष्कर्ष निघतो पाहू. सम संख्येत बाजू असणाऱ्या अनियमीत बहुभुजाकृतींसाठी काही नियम निष्पन्न होतो काय याचाच आपल्याला विचार करायचा आहे.



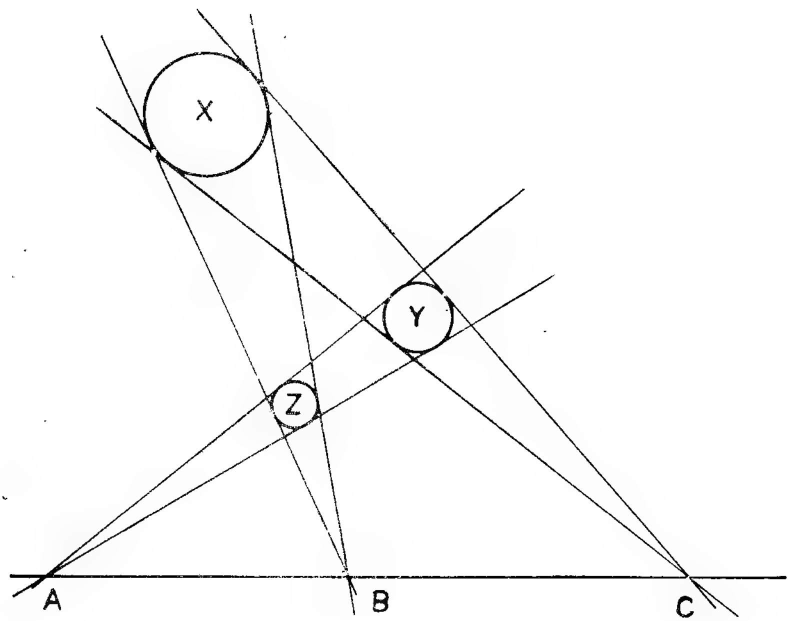
सोईसाठी अगदी अनियमीत आकार असलेला एक षट्कोन काढून घ्या. नंतर प्रत्येक बाजूचे मध्यबिंदू निश्चित करुन क्रमाने ते सांधा म्हणजे मूळ षट्कोनाच्या आत एक नवीन अनियमीत षट्कोन निर्माण होईल. ह्याच कृतीची वारंवार पुनरावृत्ती करुन एकात एक असे अनेक षट्कोन काढा. विशेषतः सर्वात आतील षट्कोनाकडे नजर टाका, तुम्हाला असे आढळेल की वरील कृतीची जसजशी पुनरावृत्ती करीत जावे तसतसे आतील षट्कोनाच्या समोरच्या बाजू सुमांतर होत आहेत. इतकेच नव्हे तर त्यांच्या बाजूंची लांबीही समान होत आहे. तसेच एका आड एक बहुभुजाकृतींचा आकार साधारण सारखा आहे असेही तुमच्या लक्षात येईल. चौकोन, अष्टकोन, दशकोन वैगरे बहुभुजाकृतीसाठी वरील कृतीची पुनरावृत्ती करुन पहा, तुम्हाला हेच निष्कर्ष मिळतात का !

## १५ : मोंगची तीन वर्तुळे

युद्ध कौशल्याचा विषय निघाला की चटकन डोळ्यासमोर नाव उभे रहाते ते नेपोलिअनचे. युद्धाशिवाय नेपोलिअनला गणिताचीही चांगली आवड होती. इजिप्तवरील स्वारीत तेथील प्राचीन संस्कृतीचा अभ्यास करण्यासाठी त्याने संशोधकांचे एक पथक आपल्याबरोबर नेले होते. त्यामध्ये मोंग ह्या नावाचा एक नामवंत गणितीही होता. गणितातील काही मूलभूत सिद्धांत मोंगच्या नावावर जमा आहेत. विशेषतः भूमितीमधील एक महत्वाचा सिध्दांत मोंगच्या नावाने ओळखला जातो. प्रत्यक्ष आकृतीवरुनच त्याचा हा सिद्धांत सहज लक्षात येईल.

एका कागदावर X, Y आणि Z ही कोणत्याही त्रिज्जांची तीन वर्तुळे कुठेही काढलेली आहेत. एका वेळी दोन वर्तुळांना त्यांच्या बाह्य बाजूने स्पर्श रेषा काढलेल्या असून आकृतीमध्ये स्पर्श रेषांच्या तीन जोड्या तयार झालेल्या दिसतात. स्पर्श रेषांची प्रत्येक जोडी एका विशिष्ट बिंदूत मिळते. आकृतीमधील X आणि Y ह्या वर्तुळांना काढलेल्या स्पर्श रेषांची जोडी C ह्या बिंदूत, X आणि Z ह्या वर्तुळांना काढलेल्या स्पर्श रेषांची जोडी B या बिंदूत व Y आणि Z या वर्तुळांना काढलेल्या स्पर्श रेषा A या बिंदूत एकत्र मिळतात.

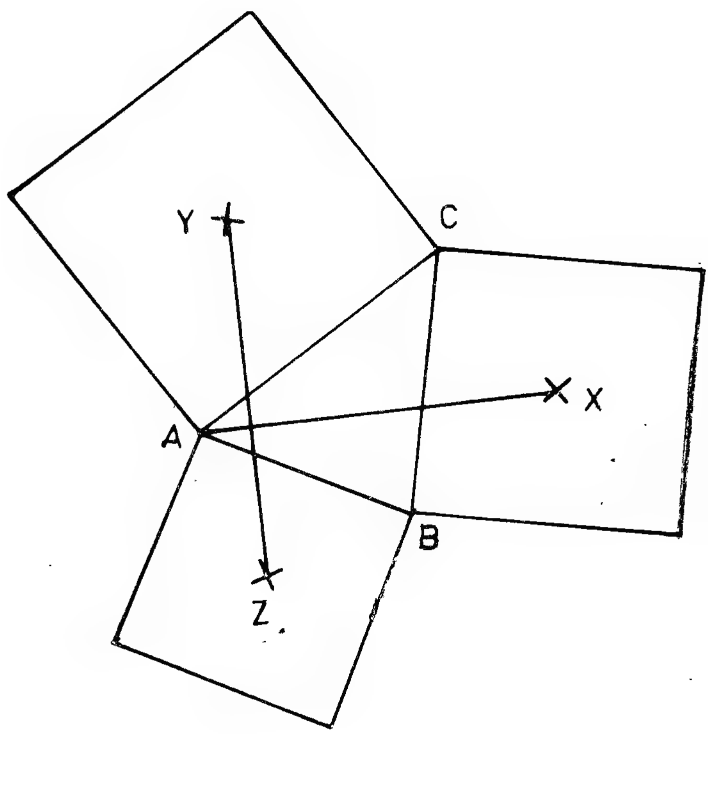
महत्त्वाची गोष्ट अशी की A, B आणि C हे बिंदू एका सरळ रेषेवर असतात. हाच तो मोंगचा सिद्धांत. कागदावरील वर्तुळे कुठेही असोत आणि कोणत्याही त्रिज्जांची असोत. स्पर्शरेषांच्या तीन जोड्यांचे छेदन बिंदू एका सरळ रेषेवरच पाहिजेत. तुम्ही स्वतः तीन वर्तुळे काढून मोंगचा हा सिद्धांत पडताळून पाहू शकाल.


X
Y
Z
A
B
C

♉ ○

## १६ : त्रिकोणावर चौरस

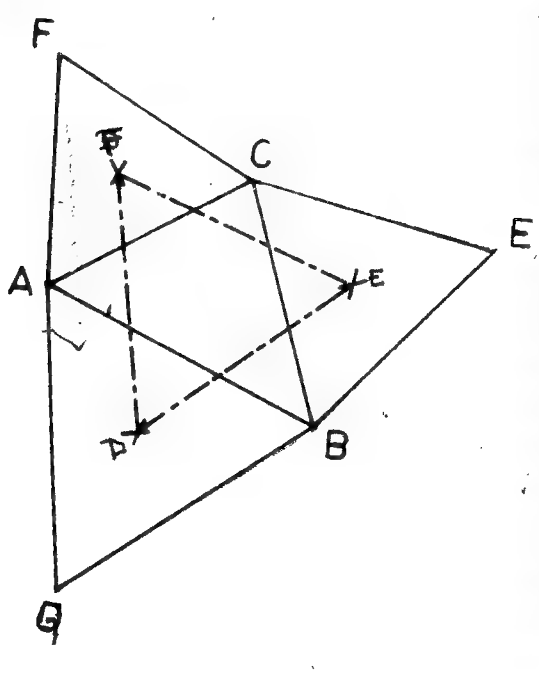
केवळ तीनच रेषा असलेल्या त्रिकोणाचे गुणधर्म किती असावेत याला खरोखरच काही मर्यादा नाही. भूमितीचा अभ्यास बहुधा त्रिकोणापासूनच चालू झाला असावा. चौकोन, पंचकोन वगैरे बहुभुजाकृती मानवाच्या जरा उशीरानेच लक्षात आल्या असाव्यात. म्हणूनच युक्लिडची भूमिती त्रिकोणाच्या गुणधर्मांनी ओतप्रोत भरलेली दिसते. आपल्याला त्रिकोणाचा असाच एक खास गुणधर्म पहायचा आहे.



ABC हा कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढून घ्या. नंतर ह्या त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू ही एका चौरसाची बाजू आहे असे समजून, मूळ त्रिकोणाच्या बाजूंवर तीन चौरस काढा. BC, CA आणिAB ह्या बाजूंवरील चौरसांच्या केंद्र बिंदूना अनुक्रमे X,Y आणि Z अशी नावे द्या. सरते शेवटी Y आणि Z आणि X आणि A हे बिंदू रेषांच्या सहाय्याने सांधा. तुम्हाला असे आढळेल की, AX आणि YZ ह्या रेषा परस्परांशी 90 अंशाचा कोन करतात व त्यांची लांबी समान आहे. XY आणि ZC, तसेच BY आणि ZX ह्या रेषाही प्रस्तुत नियमांचे पालन करतील.

### १७ : नेपोलियनचे त्रिकोण

युद्ध आणि राजकारणे यात फुरसतीचा वेळ काढून नेपोलियन बादशहा गणिताशी खेळ करीत असे, असा प्रवाद आहे. आश्चर्याची गोष्ट अशी की भूमितीमधील एक सिध्दांत नेपोलिनच्या नावाने प्रसिध्द आहे. कदाचित् तो नेपोलियनच्या एखाद्या दरबारी गणितज्ञाने शोधून काढला असेल, आणि बादशहाची मर्जी संपादण्यासाठी नेपोलियनच्या नावावर खपविला असेल. नेपोलियनचा सिद्धांत त्रिकोणाचा एक सूप्त गुणधर्म आपल्या निदर्शनाला आणतो एवढे मात्र निश्चित.



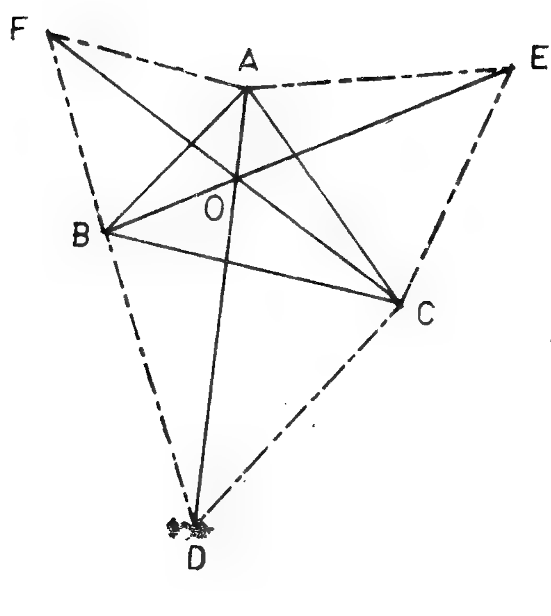

कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढून घ्या. समजा ABC हा तुम्ही काढलेला त्रिकोण असेल, तर त्यांच्या AB, BC आणि CA ह्या बाजूंवर समभुज त्रिकोण काढा. त्यांचे D, E आणि F हे केंद्रबिंदू निश्चित करा. प्रत्येक कोनापासून समोरील बाजूंवर टाकलेले

लंब ज्या एका बिंदूत छेदतात तोच समभुज त्रिकोणाचा केंद्रबिंदू असतो. शेवटी D, E आणि F हे बिंदू क्रमाने जोडून एक त्रिकोण काढा, आणि त्याची लक्षपूर्वक मोजमापे घ्या. तुमच्या असं लक्षात येईल की कोणत्याही त्रिकोणाच्या बाजूंवर समभुज त्रिकोण काढून त्याचे केंद्रबिंदू जोडले तर एक नवीन समभुज त्रिकोण तयार होतो. समभुज त्रिकोण मूळ त्रिकोणाच्या बाहेरील बाजूंना न काढता आतील बाजूला काढून त्याचे केंद्रबिंदू सांधले तरी तुम्हाला मिळणारा त्रिकोण समभुजच असेल, हे नेपोलियनच्या सिद्धांताचे आणखी एक वैशिष्ट्य आहे.

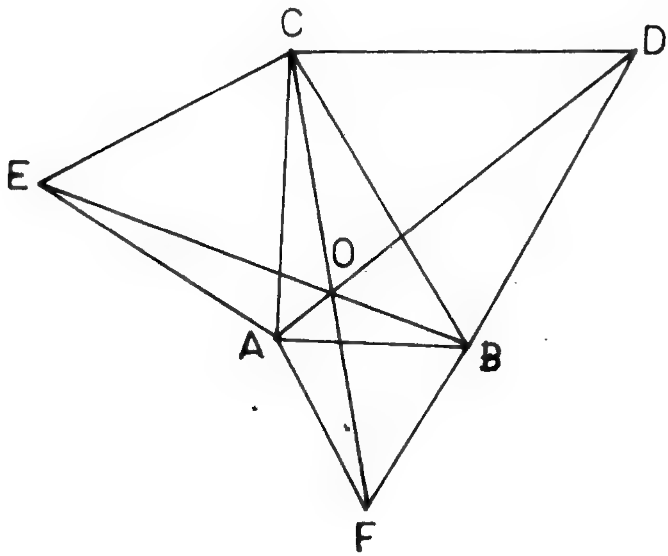
## १८ : त्रिकोणावर समभुज त्रिकोण

त्रिकोणाच्या बाजूंवर चौरस काढून त्रिकोणाचा एक खास गुणधर्म आपण मिळवला. समजा चौरसांऐवजी त्रिकोणाच्या बाजूंवर समभुज त्रिकोण काढले तर आपल्याला काही वेगळा गुणधर्म मिळेल काय? करुनच पाहूया ना!

ABC हा कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढून घ्या. आणि त्याच्या AB, BC आणि CA ह्या बाजूंवर अनुक्रमे ABF, BCD आणि CAE हे तीन



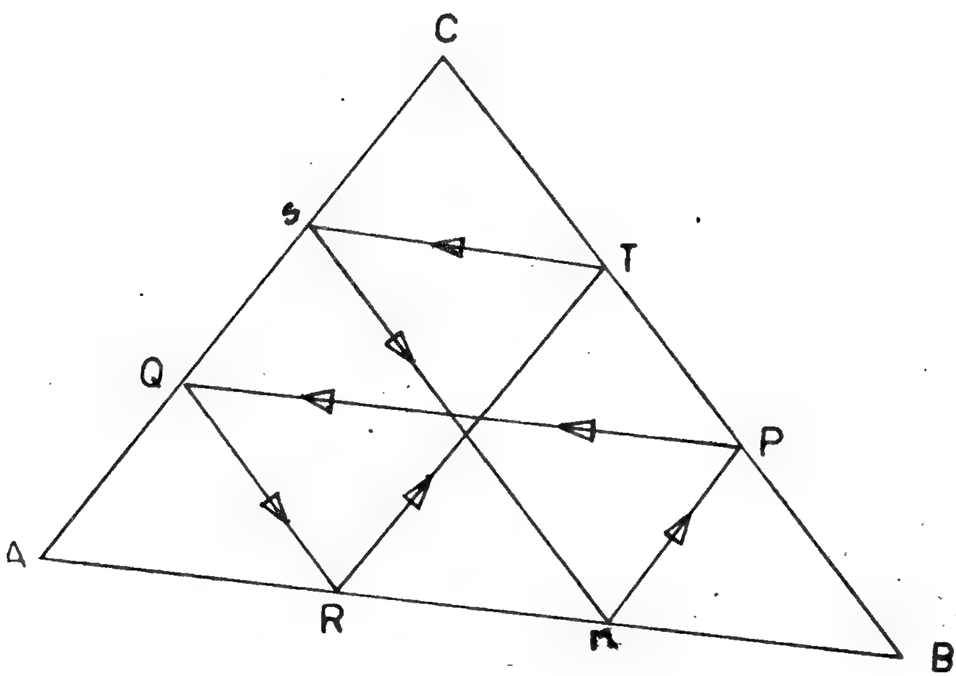
समभुज त्रिकोण काढा. नंतर ह्या त्रिकोणांचे D, E आणि F हे शिरोबिंदू अनुक्रमे A,B आणि C ह्या बिंदूशी जोडा. तुम्ही काढलेल्या आकृतीत पुढील गोष्टी आढळतात का पहा.




★ AD, BE आणि CF ह्या तीनही रेषा समान लांबीच्या आहेत.
★ वरील तीनही रेषा परस्परांना O ह्या एकाच बिंदूत छेदतात.
★ DOE, EOF आणि FOD हे सर्व कोन 120 अंशाचे आहेत.
पाहिलंत त्रिकोणाचे गुणधर्म कसे आश्चर्यकारक असतात.

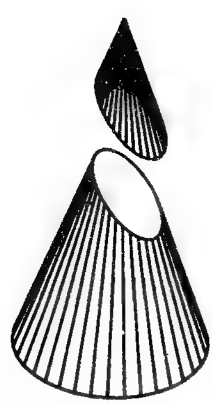
## १९ : थॉम्सनची आकृती

संशोधन हे मोठं जिकरीचं काम आहे. अगांत चिकाटी नसलेली व्यक्ती कुठल्याही विषयात संशोधन करु शकत नाही. पण समजा तुम्ही एखाद्या विषयाच्या मागे हात धुवून लागलात की मात्र तो विषय आपली अनेक गुपिते तुमच्या समोर प्रगट करतो. त्यातूनच अनेकदा महान शोध लागतात. त्रिकोणावर रेषा रेखाटित असताना अशीच एक महत्वाची गोष्ट थॉम्सन नावाच्या एका गणितज्ञाच्या लक्षात आली. थॉम्सन ह्याच्या या विशिष्ट रेखाटणाला 'थॉम्सनची आकृती' असं म्हणण्यात येतं.



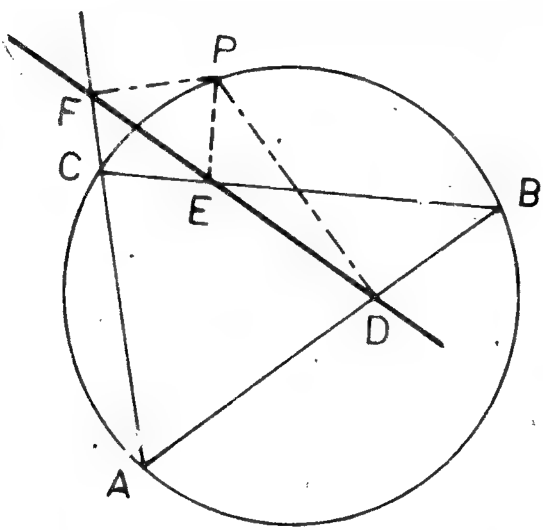

थॉम्सनच्या आकृतीसाठी कोणत्याही प्रकारचा त्रिकोण चालतो. तुम्हाला पाहिजे तसा त्रिकोण रेखाटून त्याच्या एका बाजूवर कुठेही एक बिंदू निवडा. समजा ABC ह्या त्रिकोणाच्या BC ह्या बाजूवर P हा बिंदू तुम्ही निवडला

आहे. आता P ह्या बिंदूपासून AB ह्या रेषेला PQ ही समांतर रेषा काढा. त्याचप्रमाणे पुढे Q पासून QR ही BC ला समांतर असलेली व RT ही CA ह्या रेषेला समांतर असलेली रेषा काढा. एवढी कृती झाल्यानंतर रेषा रेखाटण्याचे आपले एक चक्र पूर्ण होईल. ते संपल्यावर T आणि P हे बिंदू एकमेंकाशी जुळतात का पहा. जुळत नसतील तर पुन्हा T ह्या बिंदूपासून प्रारंभ करुन वरील प्रमाणेच AB, BC आणि CA ह्या रेषांना समांतर रेषा काढून दुसरे चक्र पूर्ण करा. ह्या चक्राचा अंतिम बिंदू पुन्हा P ह्या बिंदूशी जुळतो का ते तपासा नसेल तर वरील कृतीची आणखी एकदा पुनरावृत्ती करा. वस्तुतः रेषा रेखाटणाच्या पहिल्या दोन तीन चक्रातच, चक्राचा अंतिम बिंदू P ह्या मूळ बिंदूशी जुळेल. तुमच्या कृतीतून निष्पन्न होणाऱ्या आकृतीला 'थॉम्सनची आकृती' म्हणतात.



## २० : सिम्सन रेषा

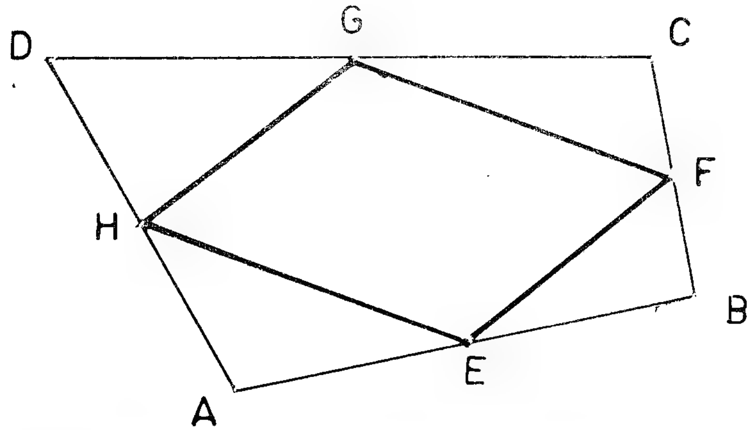
भूमिती हा प्रत्यक्ष करुन पहाण्याचा विषय आहे. कागदावर रेखाटन करताना कदाचित् तुम्हालाही भूमितीमधील एखाद्या प्रमेयाचा शोध लागेल. भूमितीतील काही शोध असेच लागले आहेत. अशाच एका शोधाचं नाव आहे 'सिम्सनची रेषा' ही रेषा काय आहे हे समजल्यावर तुम्हालाही असं वाटेल की, किती साधी गोष्ट होती. कदाचित् आपल्याही लक्षात आली असती.




एका वर्तुळात कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढा. समजा ABC हा तुम्ही काढलेला त्रिकोण आहे. नंतर वर्तुळाच्या परीघवर P हा कोणताही एक बिंदू निवडा. P ह्या बिंदूवरुन त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूवर लंब टाका. एखाद्या बाजूच्या बाहेर लंब पडत असेल तर आवश्यक तेवढी ती बाजू वाढवून घ्या. आकृतीत PD, PE, आणि PF हे लंब अनुक्रमे AB, BC आणि AC या रेषांना D, E आणि F या बिंदूत छेदतात. एक सरळ रेषा काढून हे सर्व बिंदू त्या रेषेवर पडतात का पहा. सिम्सनच्या सिद्धांताप्रमाणे हे तीन बिंदू एका सरळ रेषेत असलेच पाहिजेत. वर्तुळाच्या परीघावरील कोणत्याही बिंदूसाठी आणि वर्तुळातील कोणत्याही त्रिकोणासाठी सिम्सनचा सिद्धांत खरा आहे.

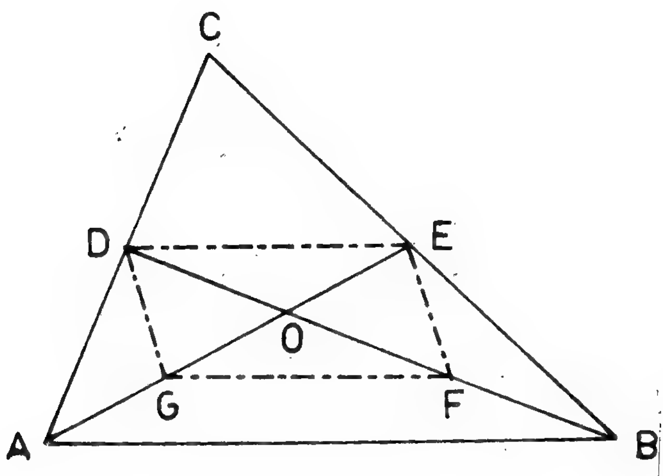
## २१ : व्हॅरिग्नॉनच्या समांतरभुज चौकोन

समांतरभुज चौकोन काढायची अगदी सोपी पद्धत कोणती बरं? कोनमापक आणि पट्टी यांचा वापर करुन समांतरभुज चौकोन काढता येईल, पण आपण मोजलेले कोन बरोबर असतीलच ह्याची हमी देता येणार नाही. बहुधा आपण मोजलेले कोन दोन तीन अंशातून चुकलेलेही असतील. कोनमापकाचा उपयोग न करताही उत्तम समांतरभुज चौकोन रेखाटता येईल. त्यासाठी फक्त कोणत्याही आकाराचा एक चौकोन काढला की काम झालं. व्हॅरिग्नॉन नावाच्या एका फ्रेंच गणितज्ञानाच्या ही गोष्ट प्रथम लक्षात आली. 1654 ते 1722 हा त्याचा काळ आहे.



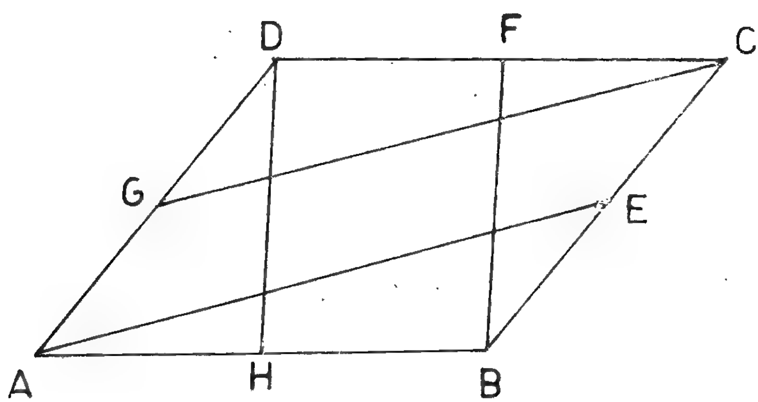

ABCD हा कोणत्याही आकाराचा एक चौकोन काढला आहे. E, F, G आणि H हे अनुक्रमे AB, BC, CD आणि DA ह्या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. E, F, G आणि H हे बिंदू त्याच क्रमाने जोडले की निष्पन्न होणारी आकृती समांतरभुज चौकोन असलाच पाहिजे. पाहिलंत, व्हॅरिग्नॉनचा सिद्धांत किती सोपा आहे. समांतरभुज चौकोन काढण्यासाठी अचुक कोन मोजायला नकोत, की बरोबर समांतर रेषा काढायला नकोत. व्हॅरिग्नॉनचा सिद्धांत साध्या चौकोनापासून आपोआप तुम्हाला समांतरभुज चौकोन मिळवून देतो.

कोणत्याही आकाराच्या त्रिकोणावरुनही समांतरभुज चौकोन मिळवता येईल. ABC ह्या त्रिकोणाच्या BC आणि CA ह्या बाजूंचे अनुक्रमे E आणि D हे मध्यबिंदू आहेत. A आणि E तसेच B आणि D हे बिंदू सांधा. AE आणि BD ह्या रेषा O ह्या बिंदूत परस्परांना छेदतील. AO आणि BO ह्या रेषा विभागांचे G आणि F हे मध्यबिंदू शोधून काढा. शेवटी D, E, F आणि G हे बिंदू अनुक्रमाने सांधलेत की मिळणारी DEFG ही आकृती समांतरभुज चौकोन असेल.



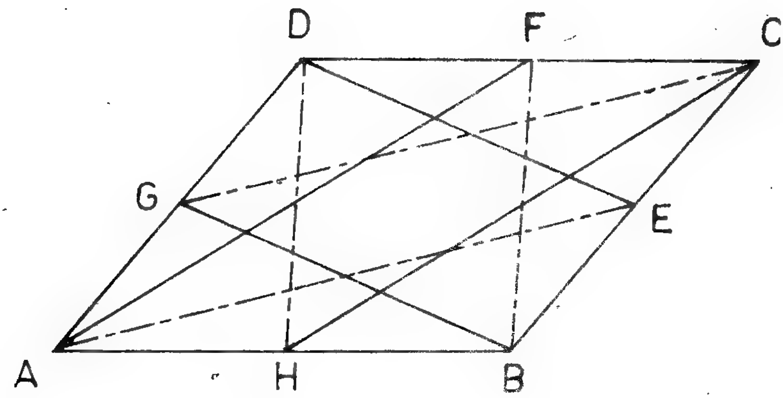
## [illegible] समांतरभुज चौकोनात समांतरभुज चौकोन

[illegible] गणिताच्या भानगडीत न पडता साध्या चौकोनाच्या किंवा [illegible] समांतरभुज चौकोन कसा काढायचा हे आता तुम्हाला [illegible] समांतरभुज चौकोनाच्याही बांजूचे मध्यबिंदू एका विशिष्ट [illegible] जोडले तर मूळ समांतरभु चौकोनाच्या मध्यात आणखी एक समांतरभुज चौकोन तयार होतो. दोन प्रकारांनी असे समांतरभुज चौकोन निर्माण करता येतात.




ABCD हा तुम्ही काढलेला किंवा मिळवलेला समांतरभुज चौकोन आहे आणि E,F,G,H हे अनुक्रमे BC, CD, DA आणि AB ह्या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत. आता A आणि E, B आणि F, C आणि G, D आणि H हे बिंदू सांधून रेषा काढल्यात की ABCD ह्या मूळ समांतरभुज चौकोनात एक नवीन पण लहान समांतरभुज चौकोन निर्माण झाल्याचे तुमच्या लक्षात येईल. ही झाली एक पद्धत.

दुसऱ्या पद्धतीमध्ये A आणि F, B आणि G, C आणि H व D आणि E असे बिंदू सांधून रेषा काढल्या की पुन्हा मूळ समांतरभुज चौकोनामध्ये एक लहान समांतरभुज चौकोन तयार होईल.



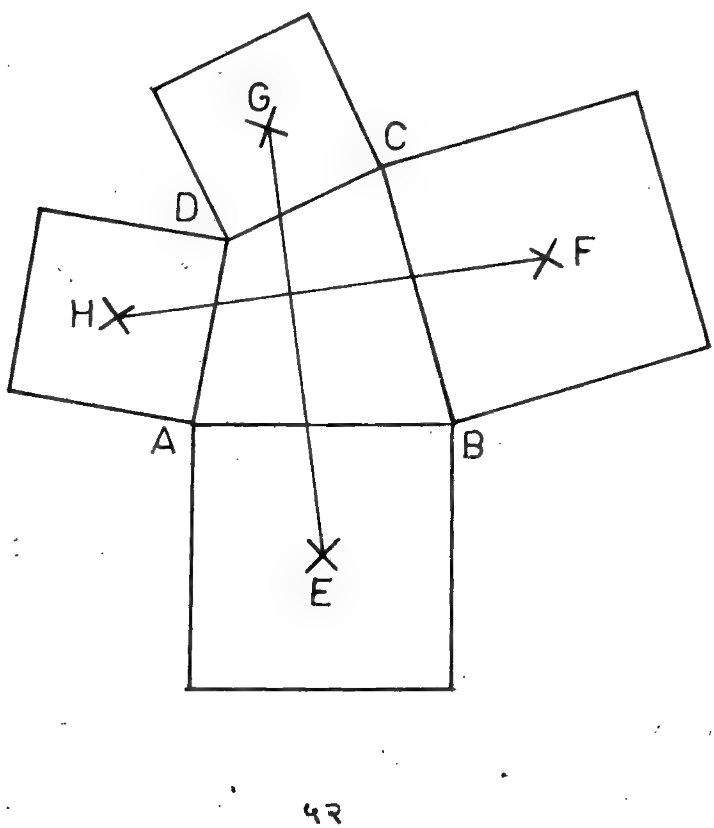

पाया आणि दोन समांतर रेषांमधील अंतर यांचा गुणाकार केला की आपल्याला समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ मिळते. ह्या सूत्राच्या सहाय्याने तुम्हाला प्रत्यक्ष मोजमाप करुन मूळ समांतरभुज चौकोनाचे व वरील पद्धतीने तयार झालेल्या आतील लहान समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ सहज मोजता येईल. आतील समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ बाहेरील समांतरभुज चौकोनाच्या एक पंचमांश आहे का पहा.

समजा मूळ समांतरभुज चौकोनात एकाच वेळी दोन्ही पद्धतींनी आतील समांतरभुज चौकोन काढले तर तुम्हाला एक अष्टकोन मिळेल. त्याचे क्षेत्रफळ मूळ समांतरभुज चौकोनाच्या एक षष्ठांश असते.

## २३ : चौकोनावर चौरस

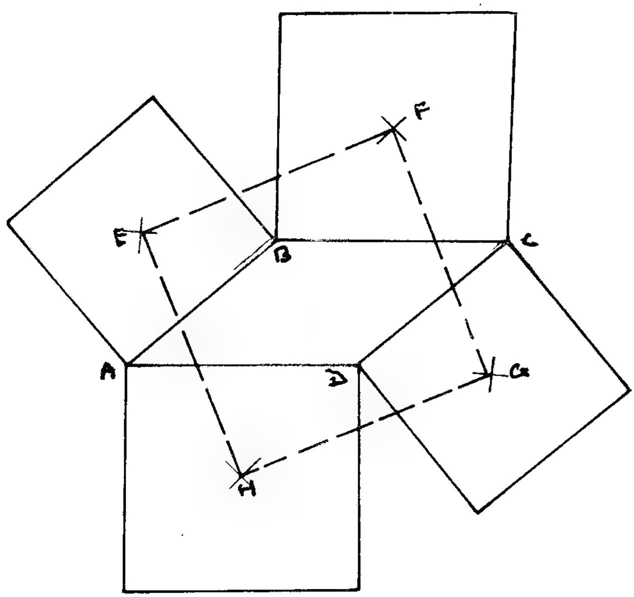
कोणत्याही आकाराच्या चौकोनाचे काही गुणधर्म असू शकतील याची आपल्याला कल्पनाही येणार नाही. पण काही वेळा क्षुल्लक दिसणाऱ्या गोष्टीतही महत्त्वाचे नियम दडलेले असतात. वर वर ओबडधोबड दिसणारा चौकोन हे त्याचेच एक उत्तम उदाहरण आहे. प्रत्यक्ष आकृती काढून आपल्याला काय नियम मिळतो पाहू.

ABCD हा कोणत्याही आकाराचा आणि बाजू असलेला चौकोन काढा. नंतर चौकोनाच्या प्रत्येक बाजूवर एक याप्रमाणे चार चौरस रेखाटून त्याचे केंद्र बिंदू निश्चित करा. चौरसाचे कर्ण ज्या बिंदूत छेदतात तोच त्याचा केंद्र बिंदू असतो. ह्या केंद्रबिंदूना अनुक्रमे E, F, G आणिH अशी नावे द्या. सरते शेवटी E आणि G व F आणि H हे बिंदू सांधून EG आणि FH अशा दोन रेषा काढा.



तुमच्या असं लक्षात येईल की, EG आणि FH ह्या चौरसांचे केंद्र जोडणाऱ्या रेषा परस्परांना काटकोनात छेदतात. एवढेच नव्हे तर त्या समान लांबीच्या असतात. औबेल नावाच्या एका गणितज्ञाने हा गुणधर्म प्रथम शोधून काढला.

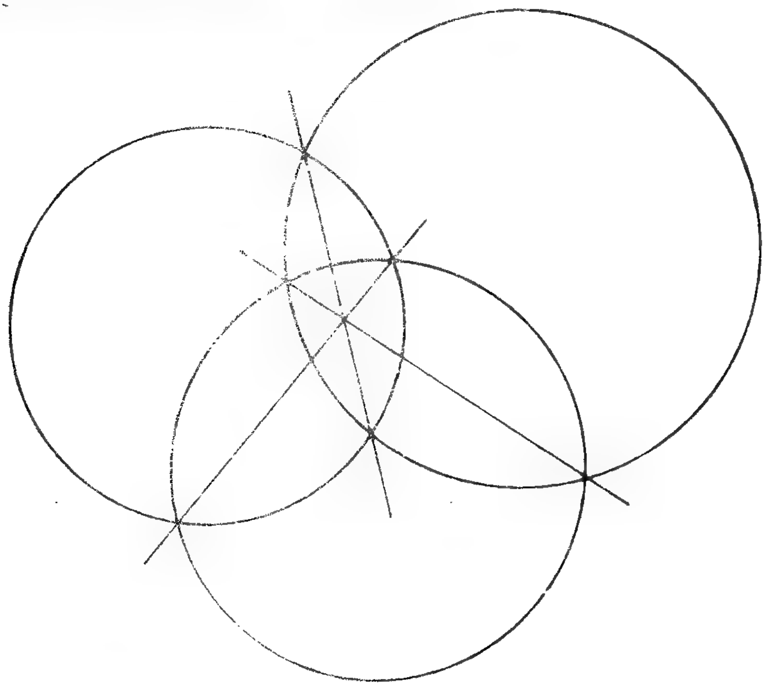
वरील आकृतीत काढलेले चौरस चौकोनाच्या बाजूंच्या बाहेर होते. समजा ते रेषांच्या आतील बाजूला काढले तरीही चौरसाचे केंद्र जोडणाऱ्या रेषा काटकोनातच छेदतील आणि त्या समान लांबीच्याही असतील.




समजा साध्या चौकोनाच्या ऐवजी समांतरभुज चौकोन काढलात तर एक मनोरंजक निष्कर्ष मिळेल. ह्या आकृतीत EG आणि FH ह्या रेषा समान परस्परांना लंबरुप असतीलच पण शिवाय E, F, G आणि H हे बिंदू जोडले तर एक नवीन चौरस तयार होईल.

## २४ : तीन वर्तुळांच्या जीवा

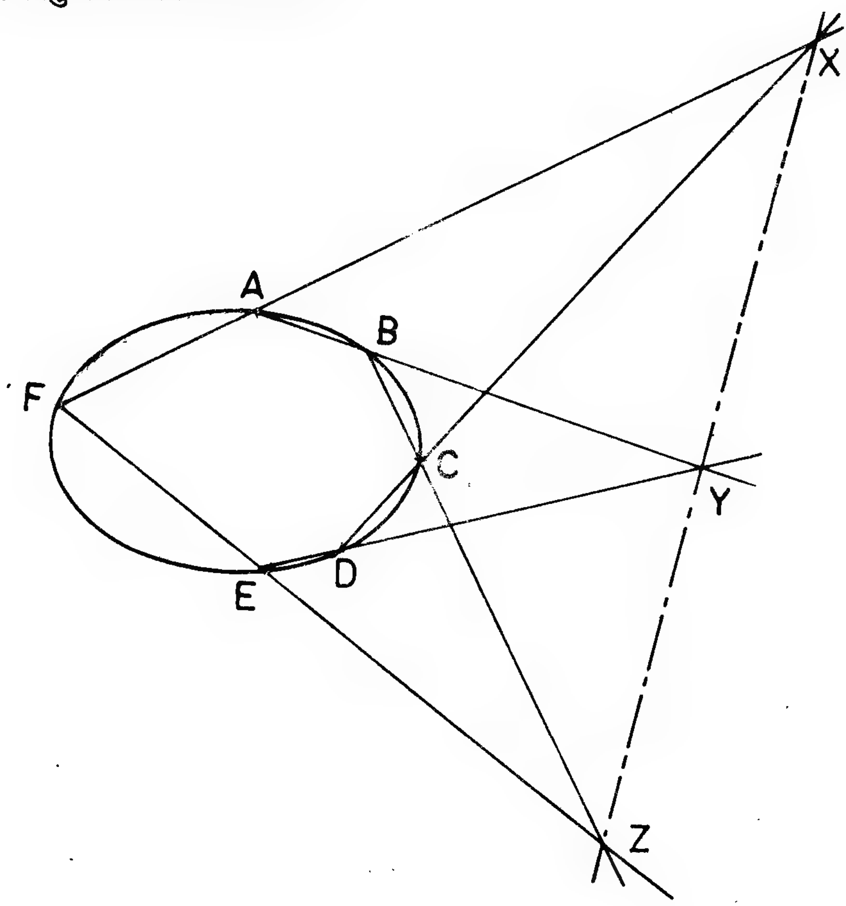
भूमितीमधील सर्वात महत्त्वाची आकृती कोणती? असा प्रश्न विचारला तर बरेच लोक वर्तुळाकडे बोट दाखवतील. वर्तुळाचे महत्त्व भूमितीपुरतेच मर्यादित नाही. वर्तुळाने जणू काही सारे मानवी जीवन व्यापून टाकले आहे. प्राचीन ग्रीक तत्ववेत्त्यांनी वर्तुळ ह्या एकाच आकाराला परीपूर्ण मानले आहे. त्यांच्या दृष्टीने वर्तुळ ही एकच निष्कलंक आकृती आहे. अशा ह्या वर्तुळाचे अक्षरशः असंख्य गुणधर्म आहेत. त्यातीलच एक पण सहजासहजी लक्षात न येणारा एक गुणधर्म आपल्याला पहायचा आहे.



कोणत्याही व्यासांची पण परस्परांना छेदणारी तीन वर्तुळे काढा. प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या दोन वर्तुळांना योग्यप्रकारे छेदेल ह्याची मात्र काळजी घ्या. दोन वर्तुळे ज्या दोन बिंदूत छेदतील त्यांना जोडणारी रेषा दोन्ही वर्तुळांची समान जीवा असणार हे उघड आहे. अशा एकंदर तीन जीवा तुम्हाला मिळतील. महत्त्वाची गोष्ट अशी की ह्या तीन जीवा एकाच बिंदूत परस्परांना छेदतात, असे तुमच्या लक्षात येईल.

## २५ : पास्कलचा गूढ षट्कोन

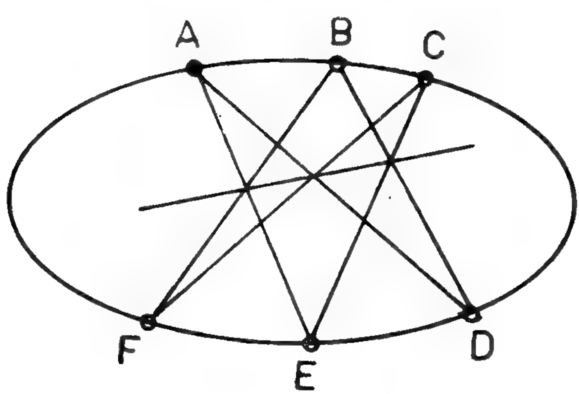
सतराव्या शतकात ब्लैझ पास्कल नावाचा एक महान गणिती होऊन गेला. आपल्या अल्प आयुष्यात त्याने गणितातील अनेक मूलभूत शोध लावले. पास्कलने किशोर वयातच गणन करणारे एक यंत्र बनविले होते. त्याच्या या संशोधनाला मानाचा मुजरा म्हणून त्याचे नाव संगणकाच्या एका आधुनिक भाषेला देण्यात आले आहे. 'पास्कलचा गूढ षट्कोन' या नावाने त्याचा एक शोध भूमितीमध्ये सुप्रसिध्द आहे. त्याच्या ह्या शोधाने भूमितीमधील गूढत्व खरोखरच प्रगट झाले आहे. पास्कलचा हा गूढ षट्कोन काय आहे, हे पहाण्यासाठी आपल्याला दीर्घवर्तुळाचा आधार घ्यावा लागेल.



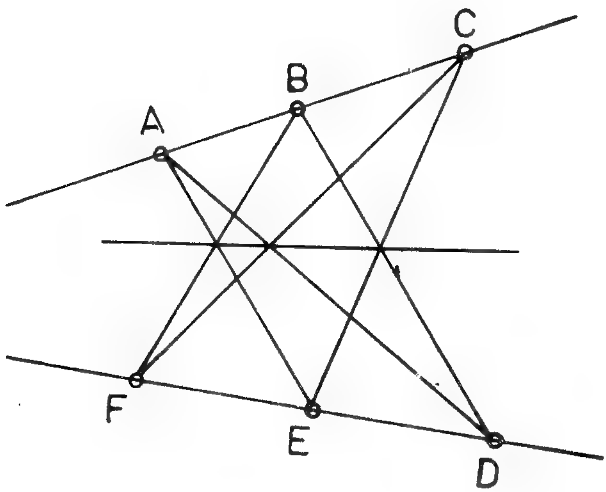
तुम्हाला सोप्या वाटेल त्या पद्धतीने एक दीर्घवर्तुळ काढून त्यामध्ये कोणत्याही आकाराचा एक षट्कोन काढा. षट्कोनाचे सहाही कोन दीर्घवर्तुळाला आतून स्पर्श करतील याची मात्र काळजी घ्या. समजा ABCDEF हा तुम्ही दीर्घवर्तुळात काढलेला षट्कोन आहे. ह्या षट्कोनातील AB आणि ED, BC आणि FE, व DC आणि FA ह्या समोरासमोरील बाजू पुढे वाढवून त्यांचे अनुक्रमे Y, Z आणि X हे छेदनबिंदू शोधून काढा. हे सर्व छेदन बिंदू एका रेषेने परस्परांशी जोडता येतील. निराळया शब्दात लिहायचे झाल्यास हे सर्व छेदनबिंदू एकाच सरळ रेषेवर असले पाहिजेत. दीर्घवर्तुळातील षट्कोन कसाही असो, त्याच्या समोरासमोरील बाजू वाढवून जे छेदनबिंदू मिळतात ते एकाच रेषेवर असले पाहिजेत. पास्कलच्या षट्कोनतील गूढता ती हीच!

## २६ : सहा बिंदूंची चलाखी

दीर्घवर्तुळातील पास्कलच्या गूढ षट्कोनाची ओळख करुन घेतल्यानंतर आपल्याला त्यामधून प्राप्त होणाऱ्या एका व्यापक सिद्धांताचा परिचय करुन घ्यायला हरकत नाही. समजा षट्कोनाऐवजी दीर्घवर्तुळाच्या परिघावर सहा बिंदू निवडले तर काय होईल? प्रत्यक्ष करुन पाहिलंत तर तुम्हाला आणखी एक सुखद धक्का बसेल.



पुन्हा एकदा तुम्हाला आवडेल त्या पद्धतीने एक दीर्घवर्तुळ रेखाटा. आणि त्याच्या परिघावर A,B,C,D,E आणि F हे सहा बिंदू कुठेही निवडा. सोबतच्या आकृतीत D आणि E हे बिंदू A च्या समोर D आणि F हे बिंदू B च्या समोर व E आणि F हे बिंदू C च्या समोर आहेत. ह्या समोरासमोर असणाऱ्या बिंदूच्या जोड्या सरळ रेषांनी सांधून टाका. ह्या रेषा विशिष्ट बिंदूमध्ये परस्परांना छेदतील.हे सर्व छेदन बिंदू एकाच सरळ रेषेवर असले पाहिजेत.

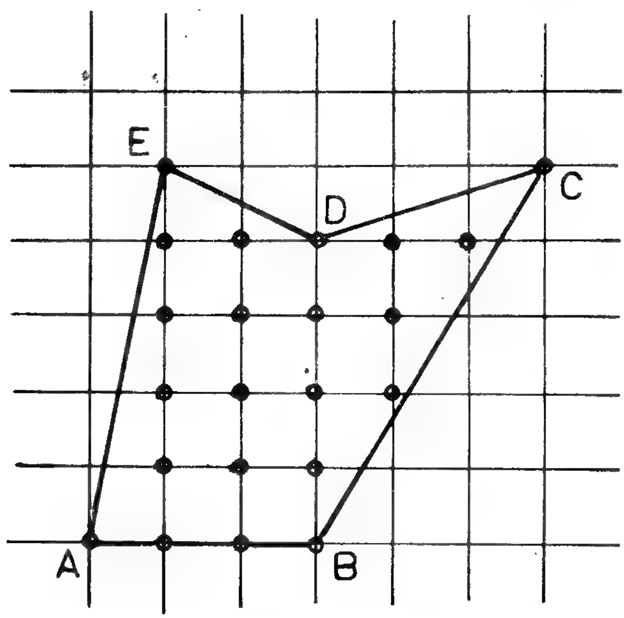



हाच नियम परस्परांमध्ये कोन करणाऱ्या कोणत्याही दोन रेषांसाठीही सिद्ध करता येतो. दीर्घवर्तुळाचे दोन तुकडे करुन मिळणाऱ्या वक्ररेषा सरळ केल्या की अशा दोन रेषा आपल्याला मिळू शकतील. ह्या वेळी A,B,C हे तीन बिंदू एका रेषेवर व D,E,F हे बिंदू दुसऱ्या रेषेवर निवडावे लागतील, तरीही आपल्या निष्कर्षात कोणताही फरक पडणार नाही.

## २७ :अनियमीत बहुभुजाकृतीच्या क्षेत्रफळाचा प्रश्न, पिकूचे उत्तर

बहुभुजाकृती नियमीत असेल तर तिचे क्षेत्रफळ काढणे फारसे अवघड

नाही. त्रिकोणाचा आधार घेऊन सर्व नियमीत बहुभुजाकृतींचे क्षेत्रफळ ठरविता येते. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 'पाया गुणिले उंची भागिले दोन' असते एवढी माहिती मात्र आपल्याला अवश्य हवी. बहुभुजाकृती अनियमीत असेल तर क्षेत्रफळ कसं निश्चित करायंच, असा प्रश्न व्यवहारातही अनेकदा आपल्यासमोर उभा रहातो. उदाहरणार्थ, एखाद्या वाकड्यातिकड्या प्लॉटचं क्षेत्रफळ ठरवायचं असेल तर आपण अडचणीत येतो. पिक् नावाच्या एका गणितज्ञाने १८९९ साली हा प्रश्न चुटकीसरसा सोडवून टाकला. पिक्ची पद्धत आवल्याला दैनंदिन व्यवहारातही उपयोगी पडेल.




समान अंतरावर अनेक उभ्या आणि आडव्या रेषा काढा म्हणजे तुम्हाला कित्येक छोटे चौरस व त्यांचे अनेक छेदनबिंदू मिळतील. अशा रचनेला इंग्रजीत 'ग्रिड' असे नाव आहे. सोबतच्या आकृतीत अशीच एक ग्रिड रेखाटली आहे. त्यामधील प्रत्येक लहान चौरस एक सेन्टीमीटर लांबीरुंदीचा आहे. ABCDE ही तुम्हाला दिलेली एक अनियमीत बहुभुजाकृती आहे.

जिचे क्षेत्रफळ तुम्हाला शोधून काढायचे आहे. ही आकृती ग्रिडवर अशी ठेवा की तिचे काही छेदनबिंदू ह्या आकृतीच्या बरोबर बाजूंवर पडतील. त्यानंतर आकृतीच्या बाजूंवर पडणारे एकूण बिंदू व आकृतीच्या आत पडणारे एकूण छेदनबिंदू यांच्या संख्या वेगवेगळ्या मोजा व पुढील सूत्र वापरुन तुम्हाला दिलेल्या बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ निश्चित करा.

समजा,

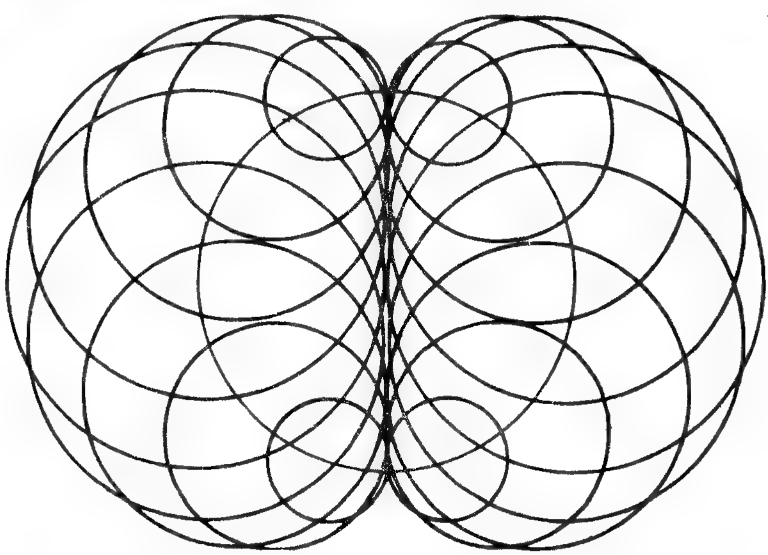
N = आकृतीच्या आत असणाऱ्या छेदन बिंदूंची संख्या, M = आकृतीच्या बाजूंवर असणाऱ्या छेदन बिंदूंची संख्या तर आकृतीचे क्षेत्रफळ = $N + \frac{1}{2}M - 1$

आपल्या आकृतीत आकृतीच्या आत 15 छेदनबिंदू आहेत. व बाजूंवर एकूण 7 छेदनबिंदू आहेत, त्यामुळे

क्षेत्रफळ = $15 + \frac{1}{2} X 7 - 1 = 17.5$ चौरस सेन्टीमीटर हे दिलेल्या अनियमीत बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ आहे.

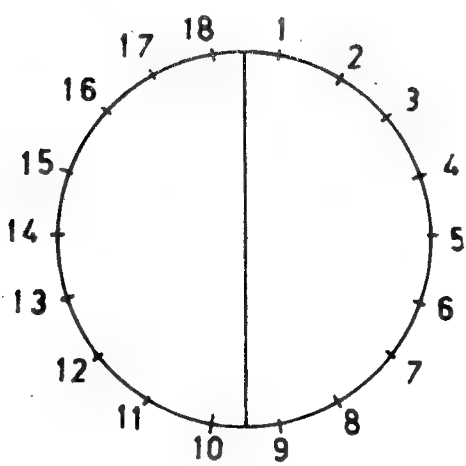
## २८ : नेफ्रॉइड

नेफ्रॉइड हा मूत्रपिंडवाचक ग्रीक शब्द आहे. मानवाच्या मूत्रपिंडाशी सादृश्य असल्यामुळे ह्या वैशिष्ट्यपूर्ण आकृतीचं नामकरण नेफ्रॉइड असं करण्यात आलं. नेफ्रॉइडचं रेखाटण फारच काळजीपूर्वक करायला हवं तरच ह्या आकृतीला अपेक्षित असलेली समानता आणता येईल.



एका पायाभूत वर्तुळावर आपल्याला नेफ्रॉइड रेखाटायची आहे. त्यामुळे मध्यम त्रिज्जेचे एक वर्तुळ काढून घ्या. वर्तुळाचा कोणताही एक व्यास संदर्भ रेषा म्हणून निवडा. संदर्भ रेषेच्या दोन्ही बाजूला पायाभूत वर्तुळाच्या परीघावर समान अंतराने बिंदूंची नोंद करा. कोनमापकाच्या सहाय्याने समान अंतरावरील बिंदू निश्चित करता येतील. संदर्भ रेषेच्या दोन्ही बाजूला असे बिंदू समान संख्येत मात्र हवेत. आता व्यासाच्या उजव्या व डाव्या बाजूला, पायाभूत वर्तुळाच्या परीघावरील बिंदू हे केंद्र बिंदू मानून निरनिराळ्या व्यासांची अनेक वर्तुळे काढायची आहेत, मात्र त्यासाठी एक महत्त्वाची अट आहे, ही सर्व वर्तुळे संदर्भरेषेला स्पर्श करणारी हवीत.

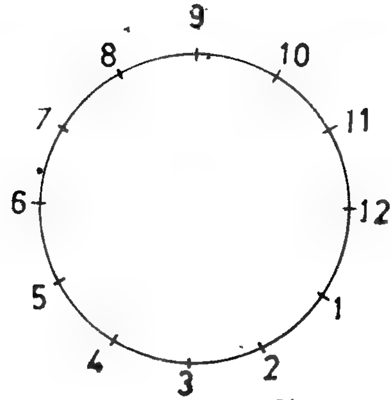
संदर्भरेषेच्या टोकापाशी पायाभूत वर्तुळाच्या परीघावरील बिंदू त्या रेषेच्या जवळ असतील. त्यानंतर हे अंतर वाढत जाईल. दोन विशिष्ट बिंदू संदर्भरेषेपासून सर्वात दूर असतील, पण नंतर बिंदू आणि रेषा यांचेमधील अंतर कमी कमी होत जाईल. आपल्याला जी वर्तुळे काढायची आहेत त्यांच्या त्रिज्जा याच क्रमाने वाढवा व कमी करा. आकृतीमधील समानतेमुळे तुम्हाला एकाच वेळी एकाच त्रिज्जेची चार वर्तुळे रेखाटता येतील. समजा पायाभूत वर्तुळाच्या परीघाचे 18 समान विभाग केले तर प्रत्येक भाग 20 अंशाचा असेल व संदर्भरेषेच्या दोन्ही बाजूंना 9 बिंदू राहतील. त्यातील 1,9,10 आणि 18 क्रमांकाचे बिंदू संदर्भरेषेला सर्वात जवळ असतील. या सर्व बिंदूवर सर्वात कमी त्रिज्जेची पण सारखीच वर्तुळे काढा. त्यानंतर 2,8,11 व 17 या क्रमांकाच्या बिंदूसाठी जरा मोठी त्रिज्जा घ्या. ह्याच पद्धतीने सर्व वर्तुळे रेखाटता येतील. सर्व वर्तुळांचा संदर्भरेषेला स्पर्श झालाच पाहिजे ह्याची मात्र अवश्य काळजी घ्या.

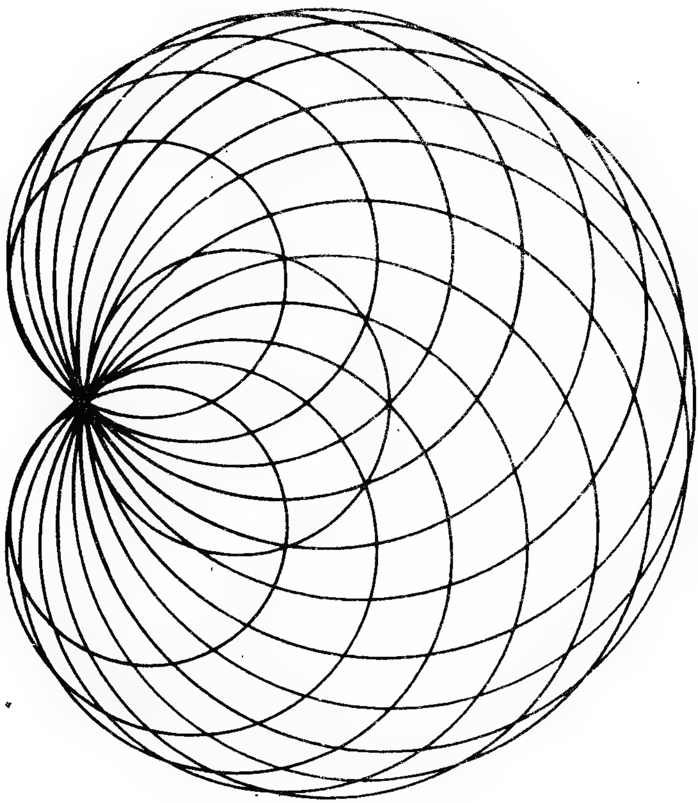


## 29 : कार्‌डॉइड

कार्‌डॉइड हा हृदयवाचक ग्रीक शब्द आहे. अर्थातच ह्या आकृतीचा आकार साधारण मानवी हृदयासारखा आहे. कार्‌डॉइड व नेफ्रॉइड ह्या दोन आकृती रेखाटण्यात बरेच साम्य आहे. नेफ्रॉइडसाठी प्रत्येक वर्तुळ संदर्भरेषेला स्पर्श करणारे असते तर कार्‌डॉइड मधील प्रत्येक वर्तुळ एका विशिष्ट बिंदूला छेदून जायला हवे.

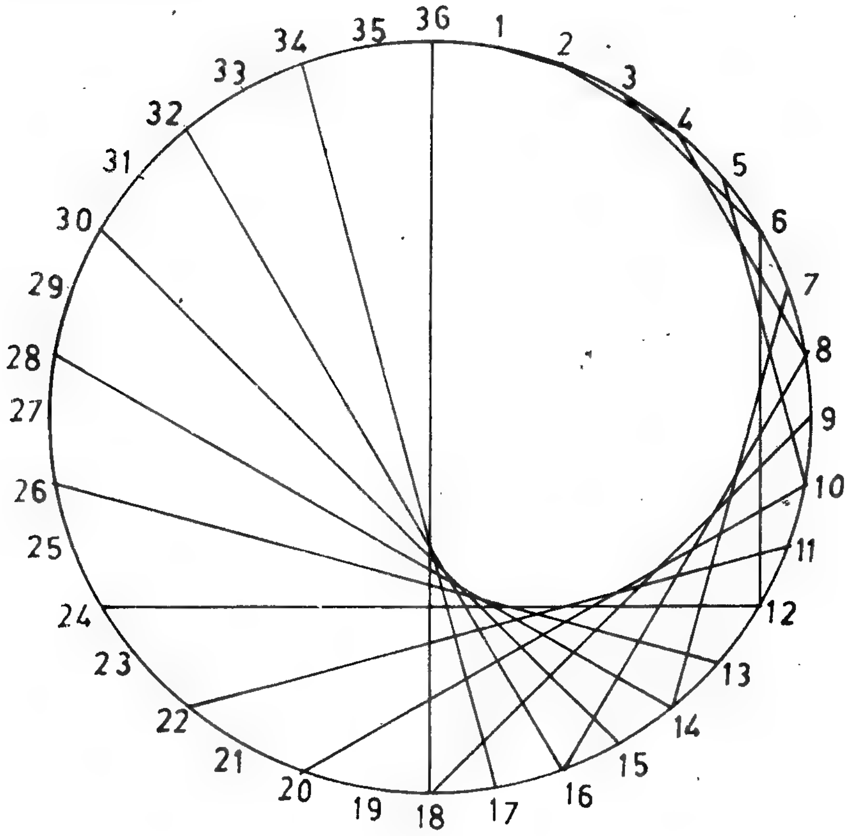
कार्‌डॉइड रेखाटण्यासाठीही एका पायाभूत वर्तुळाची अपेक्षा आहे. असे एक मध्यम व्यासाचे वर्तुळ काढून घ्या, व त्याच्या परीघाचे समान भाग करा. आपण परीघावर जे बिंदू निश्चित केले आहेत त्यातील एक बिंदू असा निवडा की ज्या बिंदूतून सर्व वर्तुळे गेली पाहिजेत. हा कारडॉइडसाठी आपला संदर्भ बिंदू आहे. आता पायाभूत वर्तुळाच्या परीघवरील बिंदू हा केंद्रबिंदू मानून निरनिराळ्या त्रिज्जांची वर्तुळे रेखाटायची आहेत. ह्या वर्तुळांच्या त्रिज्जा संदर्भ बिंदूच्या बरोबर समोर असणाऱ्या बिंदूपर्यंत क्रमाने वाढवीत न्या व पुढे त्याच क्रमाने कमी करा. याचा अर्थ असा की कारडॅइड रेखाटण्यासाठी एकाच वेळी एकाच त्रिज्जेची दोन वर्तुळे काढता येतील. समजा पायाभूत वर्तुळाचे 12 समान विभाग केले व बारावा बिंदू सदंर्भ बिंदू म्हणून घेतला तर 1 व 11, 2 व 10 वगैरे बिंदूवर समान त्रिज्जेची वर्तुळे काढावी लागतील. 1 व 11 ह्या बिंदूवर काढलेल्या वर्तुळांची त्रिज्जा सर्वात कमी तर 6 क्रमांकाच्या बिंदूवर काढलेल्या वर्तुळाची त्रिज्जा सर्वात जास्त घ्यावी लागेल. तुम्ही काढलेल्या सर्व वर्तुळांचे आवरण तुम्हाला हृदयाची आठवण करुन देईल.



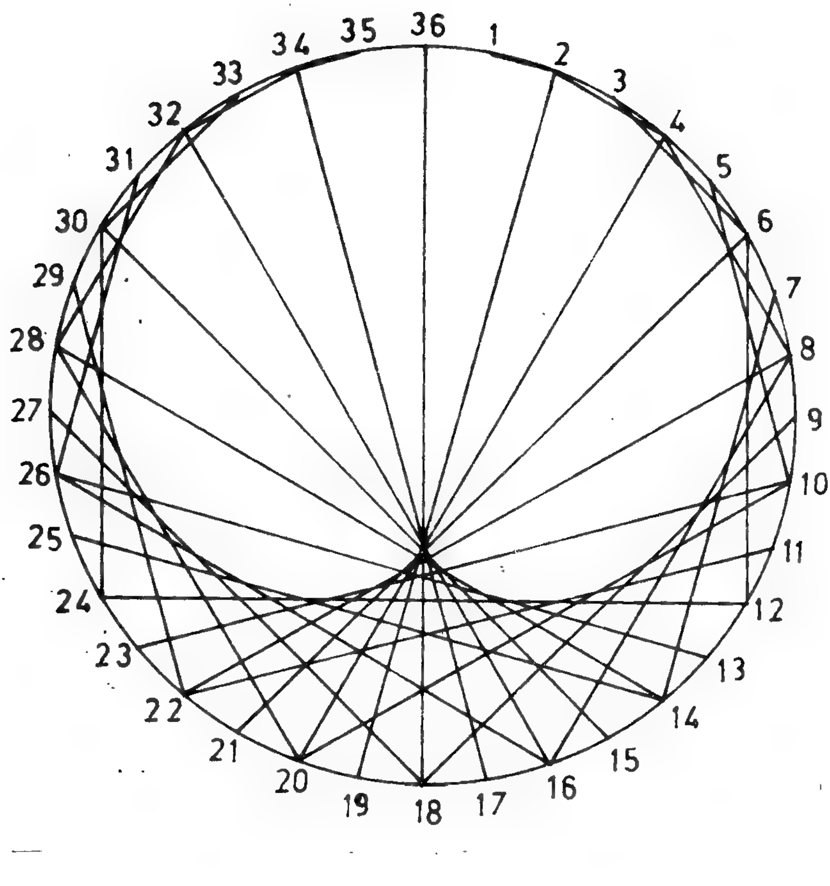


## ३० : पुन्हा एकदा कारडॉइड आणि नेफ्रॉइड

वर्तुळाची जीवा म्हणजे परीघावरील दोन बिंदूना जोडणारी सरळ रेषा. इंग्रजीत ह्या रेषेला 'कॉर्ड' असं नाव आहे. समजा एखाद्या वर्तुळाच्या परीघाचे समान भाग करुन क्रमाने जीवा न काढता त्यातील काही जीव विशिष्ट नियमाने गाळल्या तर एक अद्भुत वक्र रेषा निर्माण होते. जीवा गाळण्याचा आपला नियम असा : जीवेचे मागील टोक ज्या क्रमांकाच्या बिंदूवर असेल त्याच्या दुप्पट क्रमांकावर असणाऱ्या बिंदूशी पुढील टोक सांधा. या नियमावरुन जीवेच्या पुढील टोकाला 'जलद' व मागील टोकाला 'मंद' अशी नावे देण्यात येतात.

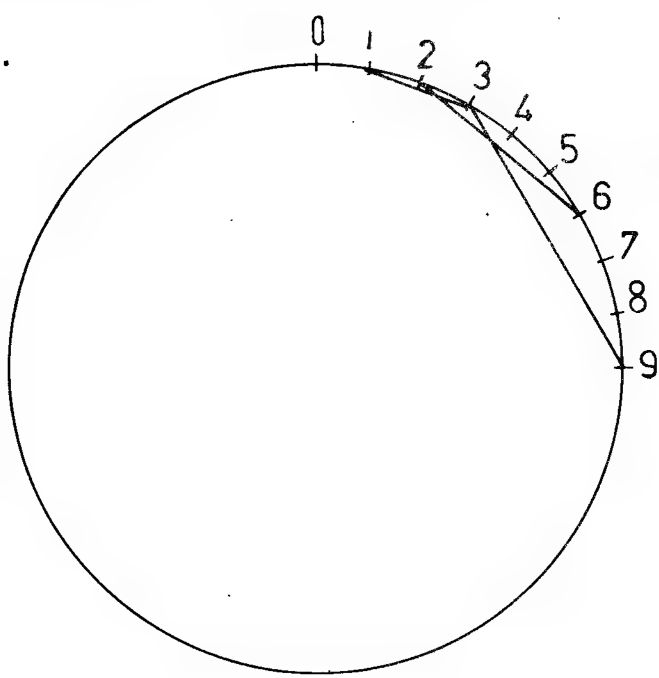


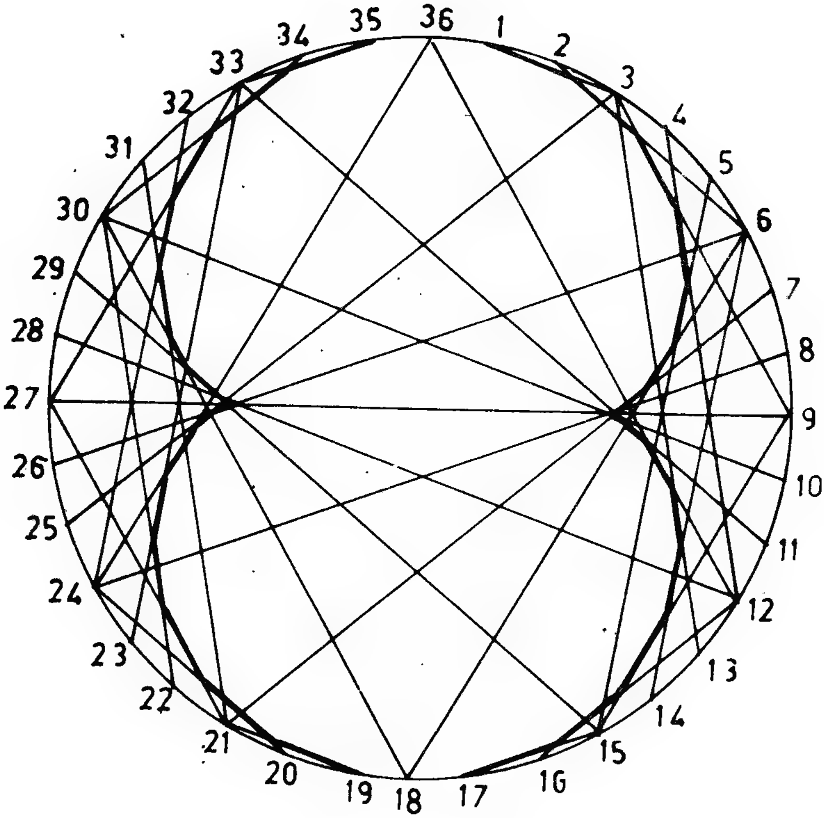
आपल्या ह्या नियमाप्रमाणे, पहिली जीवा १ व २ क्रमांकाच्या बिंदूना जोडणारी. दुसरी जीवा २ व ४ क्रमांकाच्या बिंदूशी जोडणारी, तिसरी जीवा ३ व ६ क्रमांकाच्या बिंदूना जोडणारी, अशा प्रकारे पुढील जीवा काढाव्या लागतील. नीट विचार केलात की तुमच्या असं लक्षात येईल की जीवेच्या जलद टोकाने एक वर्तुळ पूर्ण केले की मंद टोक अर्ध्या वर्तुळापर्यंतच पोहोचलेले असेल. आपण काढलेल्या सर्व जीवा तुम्हाला भूमितीमधील एक चमत्कार दर्शवितील.



आपण काढलेल्या वर्तुळाचे 36 समान भाग केले असतील तर मंद टोक 18 क्रमांकावर असताना जलद टोक 36 क्रमांकावर पोहोचेल. ही क्रिया तेथेच न थांबविता पुढे चालू ठेवली तर 19 क्रमांक 38 व्या क्रमांकाशी जोडावा लागेल. 38 वा क्रमांक म्हणजे 2 क्रमांकाचा बिंदू अर्थातच 3, 4, 5, वैगरे क्रमांकाना 39,40,41 अशा क्रमांकाने ओळखावे लागेल. अशा पद्धतीने जीवेच्या मंद टोकाचे वर्तुळे पूर्ण झाले की जलद टोकाची दोन वर्तुळे पूर्ण होतील, आणि आपल्याला मिळणारी अंतिम आकृती हृदयासारखी दिसू लागेल. ही कार्ड्डॉइड काढण्याची आणखी एक पद्धत आहे.

समजा जीवेचे जलद टोक मंद टोकाच्या तीन पट पुढे नेले तर आपल्याला मिळणारी अंतिम आकृती नेफ्रॉइड असेल. नेफ्रॉईड निष्पन्न होण्यासाठी वर्तुळाच्या परीघावरील 1 व 3, 2 व 6, 3 व 9 अशाप्रकारे बिंदू जोडून जीवा काढाव्या लागतील. ह्या आकृतीत जलद टोकाने एक वर्तुळ पूर्ण केले की मंद टोक वर्तुळाच्या एकतृतियांश भागापर्यंतच पोहोचेल.




36
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

## ३१ : डेल्टॉइड

पाश्चात्य देशांवर प्राचीन ग्रीक संस्कृतीचा जबरदस्त पगडा आहे. त्यामुळे इंग्रजीमधील अनेक शास्त्रीय विषयातील नावे ग्रीक भाषेवरुन तयार केली जातात. आपल्याला जी आकृती पहायची आहे तिचं नाव आहे. डेल्टॉइड डेल्टा ह्या ग्रीक मुळाक्षराप्रमाणे ही आकृती दिसते. म्हणूनच तिचं नामकरण करण्यात आलं डेल्टॉइड. ही आकृती काढायला जरा अवघड आहे. त्यामुळे तिची कृती आपण पदशः लिहिणार आहोत.

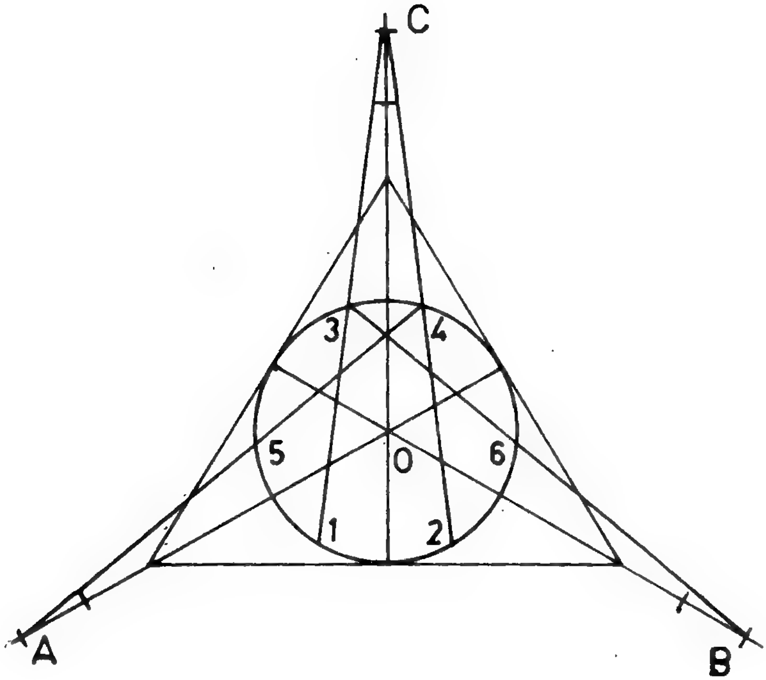
※ मध्यम व्यासाचे एक वर्तुळ काढून घ्या.

※ वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूपासून परस्परांना 120 अशांचा कोन करणाऱ्या तीन रेषा काढा. त्यांचे एक टोक वर्तुळाच्या परिघपर्यंत व दुसरे टोक परिघाच्या बाहेर काही अंतरांपर्यंत वाढवा. सोबतच्या आकृतीत OA, OB आणि OC ह्या परस्परांशी 120 अशांचा कोन करणाऱ्या रेषा दर्शविल्या आहेत.

※ वर्तुळाच्या परिघाला बाहेरुन स्पर्श करणारा व ज्याचे तीन कोन OA, OB आणि OC ह्या रेषेवर आहेत असा एक त्रिकोण काढा. हा त्रिकोण समभुज असेल.

※ समभुज त्रिकोणाच्या कोनांच्या बाहेर प्रत्येक रेषेवर समान अंतराने प्रत्येकी दोन बिंदू निश्चित करा.

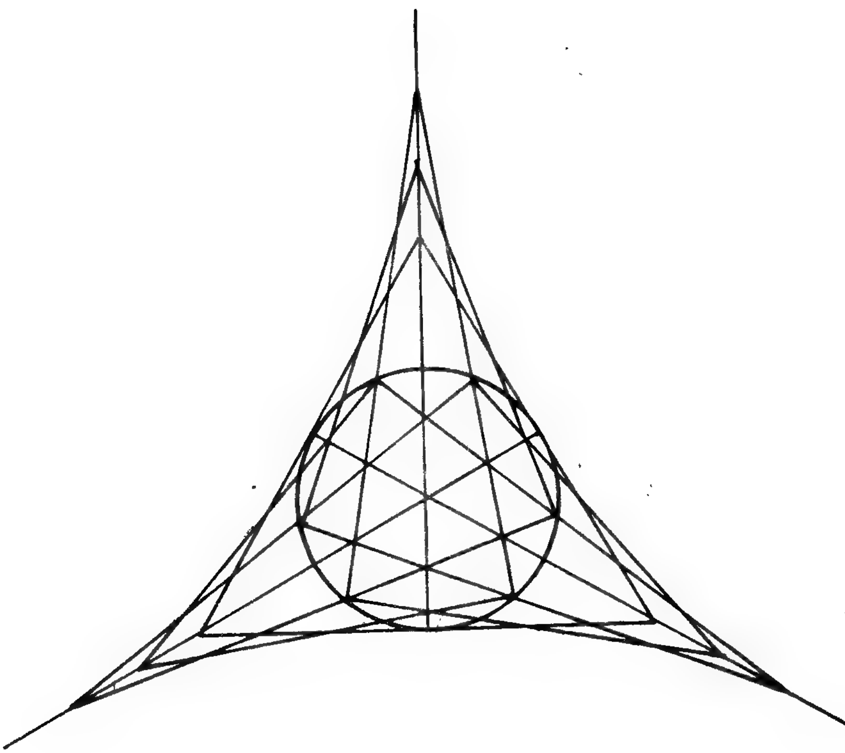
※ OC ही रेषा OA आणि OB ह्यांना दुभागते, आणि आपल्याला प्रत्येकी 60 अशांचे दोन कोन मिळतात. हे दोन कोन पुन्हा दुभागून वर्तुळाच्या परिघावर दोन बिंदू निश्चित करा व त्यांना 1 आणि 2 असे क्रमांक द्या.




* OC रेषेवर सर्वात बाहेरचा बिंदू, १ आणि २ क्रमांकाच्या बिंदूशी जोडून टाका. तुम्ही काढलेल्या दोन रेषा वर्तुळाच्या परिघाला दोन बिंदूत छेदतील त्यांना 3 व 4 असे क्रमांक द्या.
* OA रेषेवरील सर्वात बाहेरचा बिंदू क्रमांक 4 ह्या बिंदूला आणि OB रेषेवरील सर्वात बाहेरचा बिंदू क्रमांक 3 ह्या बिंदूशी जोडून टाका. तुम्ही ज्या दोन रेषा काढाल, त्या वर्तुळाच्या परिघाला दोन बिंदूत छेदतील त्यांना 1 व 6 असे क्रमांक द्या.
* आता OA, OB आणि OC ह्या रेषांवरील बिंदू पुढीलप्रमाणे वर्तुळाच्या परीघावर मिळालेल्या बिंदूशी सांधा.

OC रेषेवरील बाहेरचा बिंदू, क्रमांक 6 बरोबर,

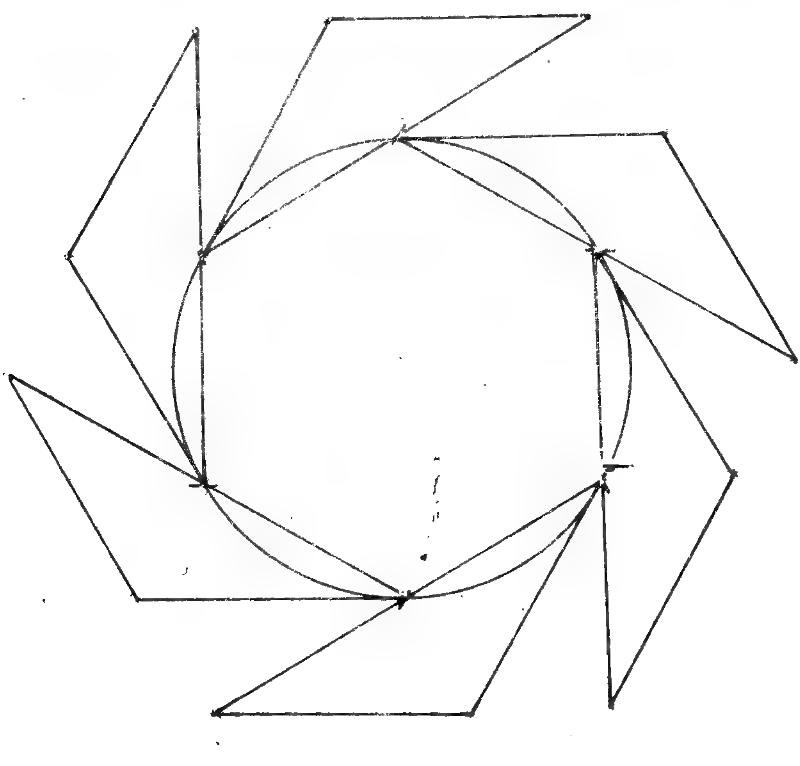
OC रेषेवरील आतला बिंदू, क्रमांक 2 व 3 बरोबर,
OB रेषेवरील बाहेरच्या बिंदू, क्रमांक 5 बरोबर,
OB रेषेवरील आतला बिंदू, क्रमांक 1 व 4 बरोबर,
ह्या कृतीबरोबरच डेल्टॉइड तयार होईल. पूर्ण झालेली आकृती पुढे दिली आहे.



## ३२ : षट्कोनाचे चक्रात रुपांतर

लहानपणी वाऱ्याबरोबर गरगर फिरणारे चक्र पाहून तुम्हाला गम्मत वाटली असेल. रंगबेरंगी कागदाचे हे चक्र साधारणतः चौरसापासून तयार केलेले असते. षट्कोनापासूनही अशा प्रकारची चक्राकृती तयार करता येईल. अर्थात ती वातचक्रासाठी वापरायची नसून एक नक्षी म्हणून त्याचा उपयोग होऊ शकेल.

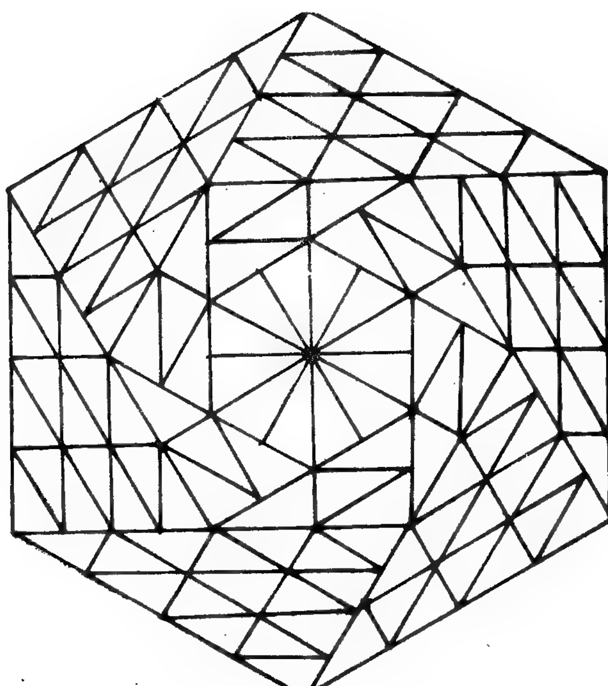
षट्कोन काढण्याचं तंत्र आता तुमच्या लक्षात आलचं आहे. प्रथम वर्तुळाचा उपयोग करुन एक नियमीत षट्कोन काढून घ्या. त्यानंतर षट्कोनाची प्रत्येक बाजू एकाच दिशेत बाहेर वाढवून दुप्पट करा. प्रत्येक वाढीव बाजू पाया आहे, असे समजून त्यावर 120 अंश शिरोकोन असलेले समद्वीभुज त्रिकोण काढा. ह्या त्रिकोणाच्या पायाजवळील कोन ३० अंशाचे असतील. तुम्हाला असे एकंदर सहा समद्वीभुज त्रिकोण काढावे लागतील. बस्स ! पूर्ण झालेली आकृती एखाद्या चक्रासारखी दिसेल.



## ३३ : षट्कोन अधिक त्रिकोण बरोबर आकर्षक आकृतीबंध

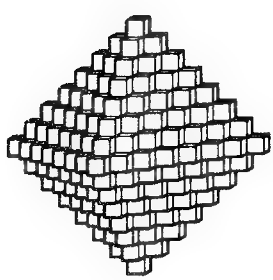
भूमितीमधील मूलभूत आकृत्यांचा उपयोग करुन खरं म्हणजे शेकडो विविध प्रकारचे आकृतीबंध निर्माण करता येतील. सोबत असाच एक आकृतीबंध दिला आहे. पहाताक्षणी तो काढायला फार अवघड आहे. असं तुम्हाला वाटेल, पण नीट विचार केलात तर तो कसा काढायचा हे तुमच्या सहज ध्यानात येईल.

हा आकृतीबंध षट्कोनावर आधारित आहे, हे सांगायला नकोच. वस्तुतः त्यात एकात एक असे एकूण तीन षट्कोन आहेत, आणि बाहेरील दोन षट्कोन सर्वात आत असलेल्या षट्कोनाचा उपयोग करुन काढले आहेत. प्रथम एक लहान आकाराचा नियमीत षट्कोन काढून घ्या. नंतर



त्याच्या सर्व बाजू एकाच दिशेत समान अंतराने पुढे वाढवा. ज्या सहा रेषा मिळतील त्यांची टोके जोडा म्हणजे आकृतीच्या मध्यभागी असलेल्या षट्कोन निर्माण होईल. ह्या षट्कोनाच्याही बाजू एकाच दिशेत समान अंतराने वाढवून त्यांची टोके जोडा म्हणजे तुम्हाला सर्वात बाहेरील षट्कोन मिळेल. एक षट्कोन पूर्ण झाला की मूळ षट्कोनाच्या बाहेर सहा सारख्या त्रिकोणाकृती तयार होतील.

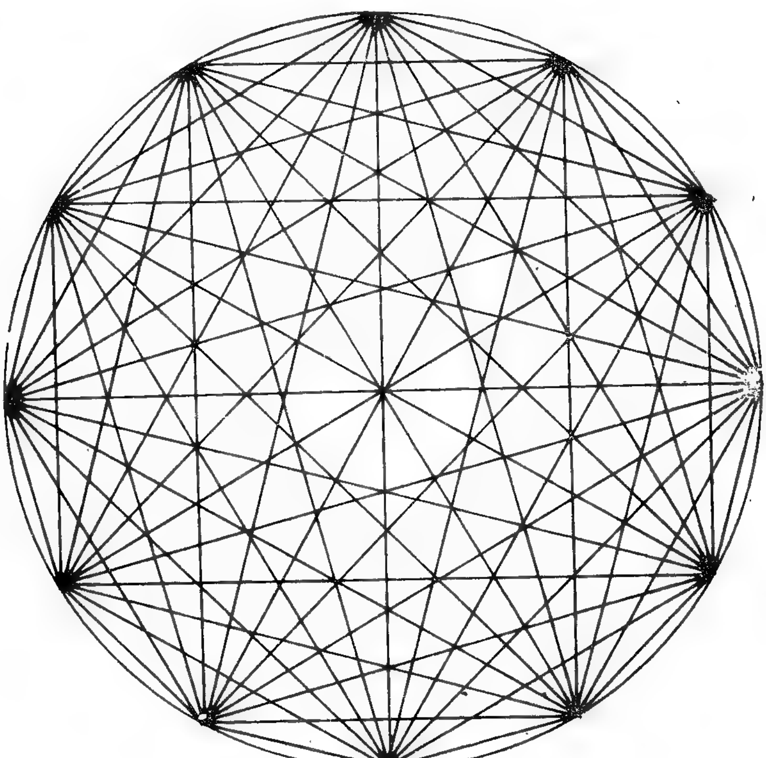
सर्वात आतील षट्कोनाचे कोन व बाजूंचे मध्य षट्कोनाच्या केंद्रबिंदूशी जोडले की लहान आकाराचे एकंदर १२ समान त्रिकोण तयार होतात. आता वाढीव बाजूंची टोके जोडल्यानंतर जे त्रिकोण तयार झाले आहेत त्यांची अनेक समान त्रिकोणात विभागणी करायची आहे. सर्वात आतील षट्कोनाच्या बाहेर निर्माण झालेल्या त्रिकोणाची विभागणी ४ समान लहान त्रिकोणात करा. तसेच मधल्या षट्कोनाच्या बाहेर तयार झालेल्या त्रिकोणांची विभागणी १६ लहान त्रिकोणात केलीत, की अवघड वाटणारा हा आकृतीबंध तयार होईल.



## ३४ : वर्तुळातील रेषांचे नक्षीकाम

साध्या वर्तुळाचा उपयोग करुन सुंदर आणि उठावदार आकृती कशी रेखाटता येते, त्याचा एक नमुना सोबत दर्शविला आहे. एका वर्तुळाचे बरोबर १२ भाग, वर्तुळाच्या परीघावरील बिंदूनी दर्शविले आहेत. कोनमापकाच्या उपयोग करुन असे वर्तुळाचे १२ किंवा २४ भाग तुम्ही सहजपणे करु शकाल. असा प्रत्येक भाग केंद्रापाशी ३० किंवा १५ अंशाचा कोन करील.

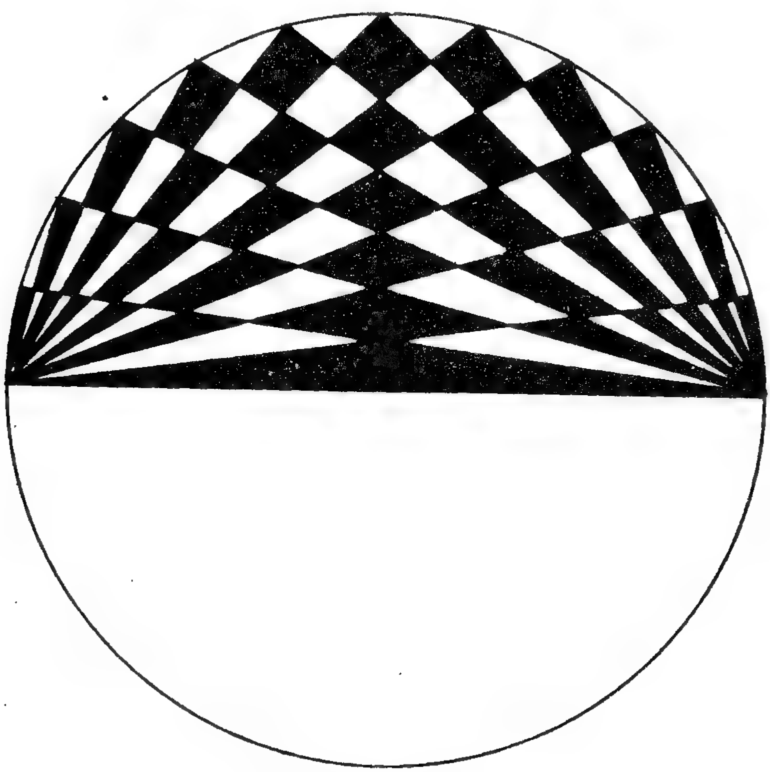
वर्तुळाचे १२ भाग करुन झाले की परीघावरील प्रत्येक बिंदू रेषांच्या सहाय्याने इतर सर्व बिंदूशी जोडा. प्रत्येक बिंदू साठी 11 रेषांच्या सहाय्याने 11 X 12 = 132 रेषा तुम्हाला काढाव्या लागतील. वर्तुळाचे 24 भाग केलेत तर आकृती आणखी आकर्षक व उठावदार दिसेल. मात्र सर्व भागांचा वर्तुळ केंद्राशी समान कोन व्हायला हवा.



## ३५ : वर्तुळातील पॅचवर्क

साध्या वर्तुळाचा उपयोग करुन कित्येक आकर्षक आकृतीबंध निर्माण करता येतात. असाच एक आकृतीबंध सोबतच्या आकृतीत दर्शविला आहे. खरं म्हणजे पूर्ण आकृतीचा हा केवळ अर्धा भाग आहे. आकृतीबंध पूर्ण करण्यांच काम तुम्हाला करायंच आहे. अर्थात पहिल्या अर्ध्या भागाची पुनरावृत्ती तुम्हाला करावी लागेल.

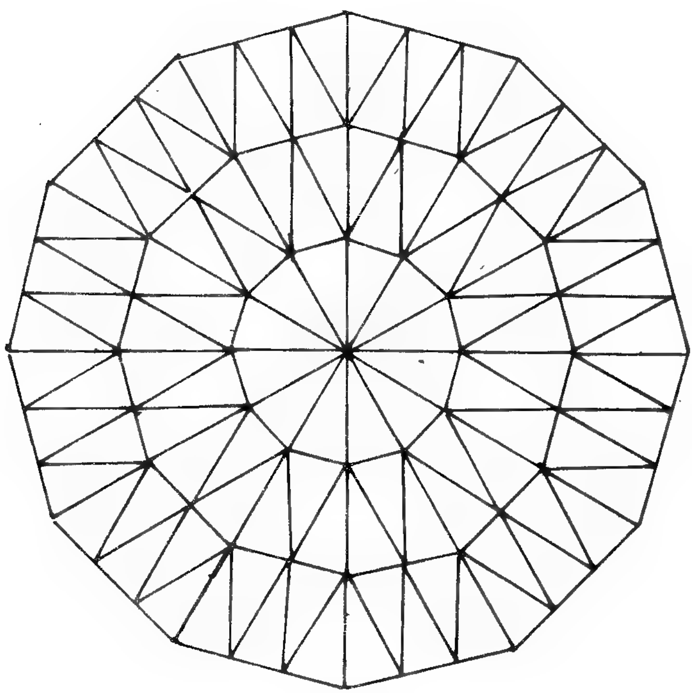
आकृतीत दर्शविल्या प्रमाणे अर्धवर्तुळाचे 15 अंशाच्या फरकाने एकंदर 12 विभाग करा. नंतर वर्तुळाच्या परीघवरील व्यासाची दोन टोक ह्या सर्व बिंदूशी रेषांच्या सहाय्याने जोडून टाका. ह्या रेषा अर्धवर्तुळाचे अनेक चित्र विचित्र चौकोनात रुपांतर करतील. त्यातील एकआड एक चौकोन रंगवा, म्हणजे एक वैशिष्ठ्यपूर्ण आकृतीबंध निर्माण होईल.



## ३६ : द्वादशकोन अधिक त्रिकोण बरोबर मोहक नक्षी

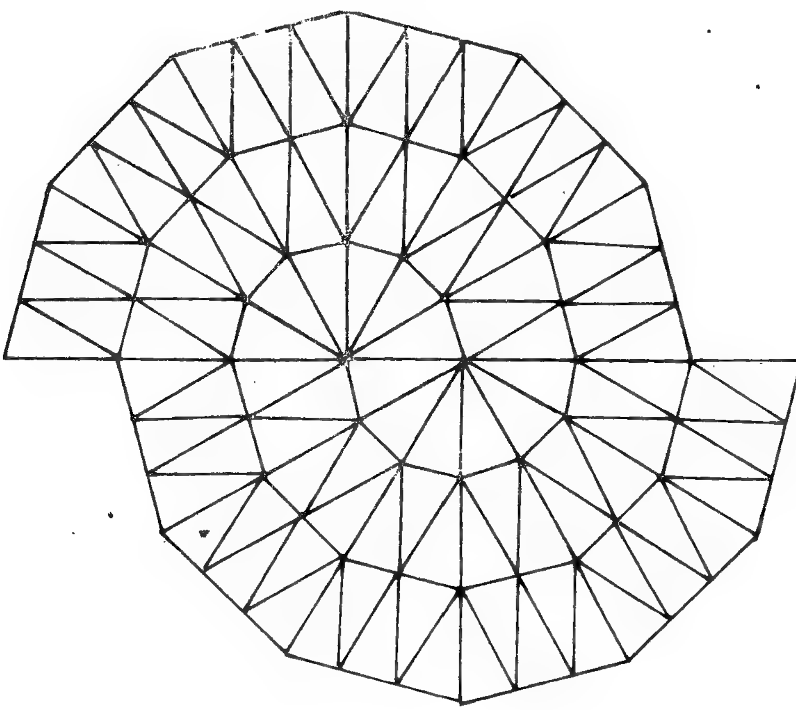
द्वादशकोनाकृतीचा उपयोग करून एक आकर्षक नक्षी तयार करता येते. त्याचा एक नमुना पुढे दिला आहे. आकृतीमध्ये अनेक लहान लहान रेषा दिसत असल्या तरी आकृतीचे रेखाटण मात्र फारसे अवघड नाही.

प्रथमतः एक लहान आकाराची द्वादशकोनाकृती काढून घ्या. आकृतीमध्ये सर्वात आतील बाजूला ही कोनाकृती तुम्हाला दिसेल. ह्या मूळ द्वादश कोनाकृतीचे सर्व कोन केंद्रबिंदूपाशी सांधून मिळणाऱ्या रेषा प्रथम दुप्पट व नंतर तिप्पट अंतराने वाढवा. दुप्पट अंतराने वाढविल्यावर मिळाणाऱ्या रेषांची टोके सांधली की मध्यभागी दिसणारी द्वादशकोनाकृती मिळेल तसेच तिप्पट अंतराने वाढविलेल्या रेषांची टोके सांधून सर्वांत बाहेरील द्वादश कोनाकृती तयार होईल.



मधल्या द्वादशकोनाकृतीच्या बाजू दुभागा व मिळणारे मध्यबिंदू अनुक्रमाने सर्वात आतील द्वादशाकृतीच्या कोनांशी जोडा. त्याचप्रमाणे सर्वात बोहरील द्वादशकोनाकृतीच्या प्रत्येक बाजूचे तीन समान भाग करा आणि मिळणारे बिंदू मध्यल्या द्वादशकोनाकृतींचे कोन व बाजूंचे मध्य यांच्याशी अनुक्रमाने सांधा. म्हणजे आपले नक्षीकाम पूर्ण होईल.

आता ही दुसरी आकृती पहा. ती काढण्याची पद्धत वरील प्रमाणेचे आहे. फक्त या आकृतीत सर्वात आतील द्वादशकृतीचा अर्धा भाग त्रिज्जे एवढ्या अंतराने उजवीकडे सरकविला आहे. पण त्यामुळे एक अभिनव प्रकारची सर्पिल आकृती आपोआप तयार होते.



## ३७ : एक आगळी वेगळी रचना

एक समभुज त्रिकोण काढून त्याच्या प्रत्येक बाजूचे सात समान विभाग करा. उदाहरणार्थ प्रत्येक बाजू 10.5 सेन्टीमीटर लांबीची असेल तर प्रत्येकी 1.5 सेन्टीमीटर याप्रमाणे 7 समान विभाग करता येतील. ह्या भागांना क्रमांक देताना त्रिकोणाची तीनही टोके विचारात न घेता सव्य दिशेत अनुक्रमाने 1 ते 18 असे क्रमांक द्या.

आपण विभागांने जे क्रमांक दिले आहेत त्यातील प्रत्येकी दोन क्रमांक सरळ रेषांनी पण विशिष्ट नियमाने सांधायचे आहेत. तो नियम असा :

प्रत्येक क्रमांकाला 9 ह्या अंकाने गुणा व मिळणाऱ्या गुणाकाराला 19 ह्या संख्येने भागा. जी बाकी शिल्लक राहील त्या क्रमांकाशी निवडलेला क्रमांक सांधा.

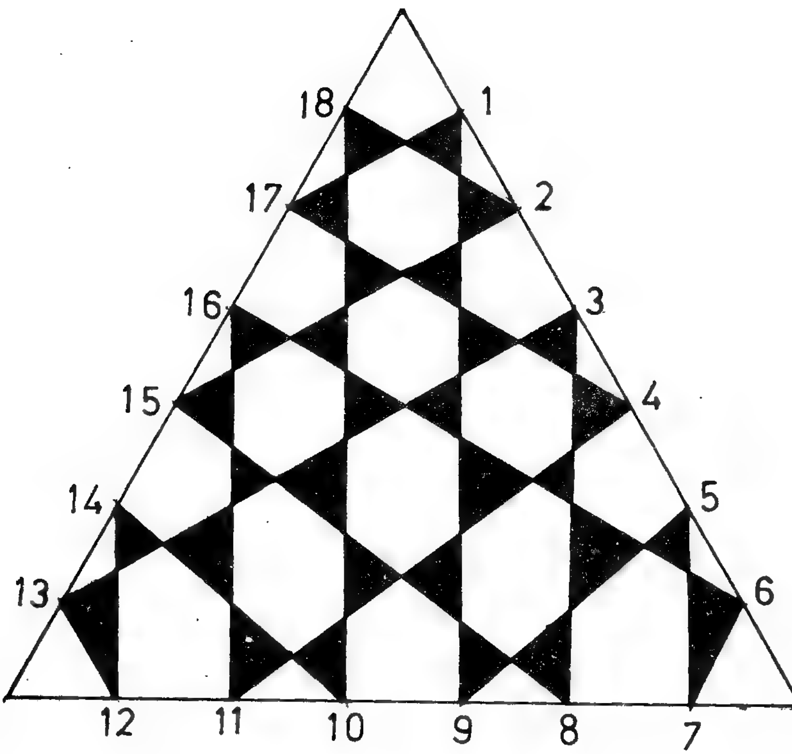
उदाहरणार्थ

क्रमांक 1 साठी : 1 X 9/19 भागाकार शून्य बाकी 9
म्हणून क्रमांक 1 व 9 हे सरळ रेषांनी सांधा

क्रमांक 5 साठी : 5 X 9/19 भागाकार दोन बाकी 7
म्हणून क्रमांक 5 व 7 हे सरळ रेषांनी सांधा.

क्रमांक 14 साठी : 14 X 9/19 भागाकार सहा बाकी 12
म्हणून 14 व 12 हे क्रमांक सांधा

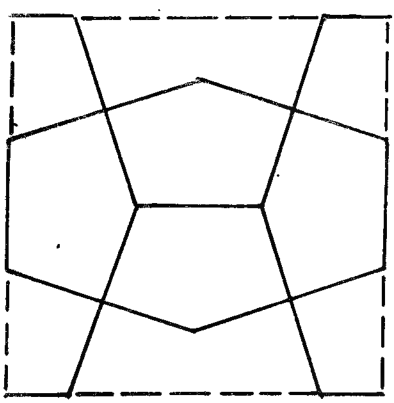
अशा प्रकारे इतर क्रमांकाचेही गणित करता येईल. वरील पद्धतीने सर्व क्रमांक परस्परांशी सांधले की तुम्ही निवडलेल्या समभुज त्रिकोणाचे विचित्र प्रकारे विभाग पडतील. त्यातील त्रिकोणी आकाराचे विभाग रंगविलेत की तुम्हाला एक उठावदार नक्षी मिळेल.


18
1
17
2
16
3
15
4
14
5
13
6
12
11
10
9
8
7

## ३८ : फरशीवरील नक्षीकाम

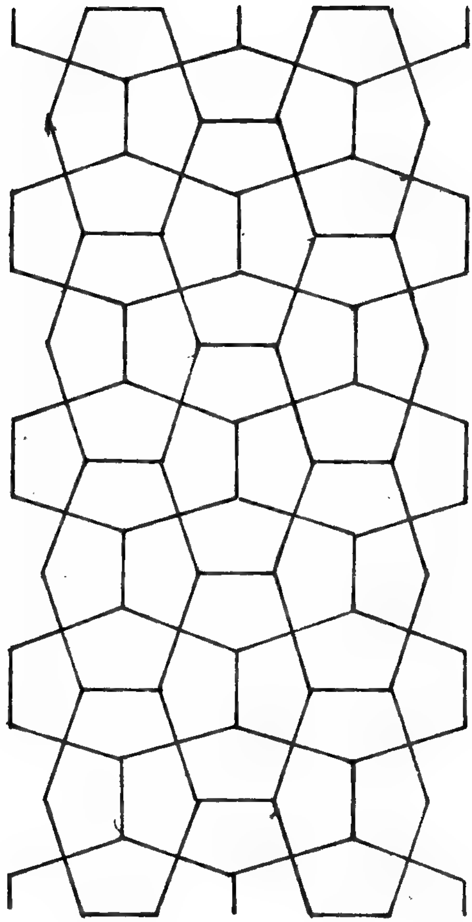
मोठमोठ्या मंदिरांच्या आवारात रंगीबेरंगी नक्षी असलेली फरशी तुम्ही पाहिली असेल. परदेशात रस्त्यांवरही अशा प्रकारची फरशी बसविण्यात येते. अशा फरशांवरील डिझाइन पाहून 'काय मस्त नक्षी आहे' असे आनंदोद्गार तुम्ही काढले असतील. नीट निरखून पाहिलंत तर एकाच फरशीवरील नक्षीची पुनरावृत्ती इतर सर्व फरशांवर केलेली असते, असं तुमच्या लक्षात येईल. सर्व फरशांवरील नक्षींचा एकत्र परिणाम म्हणून एक मनमोहक डिझाइन तयार होते.

साध्या चौरसाचे विशिष्ट प्रकाराने भाग पाडून आणि त्या भागांना योग्य रंग देऊन, अतिशय आंकर्षक नक्षी निर्माण करता येते. एक, दोन उदाहरणांवरुन फरशीवरील नक्षी कसा आकार घेते हे तुम्हाला सहज समजेल.

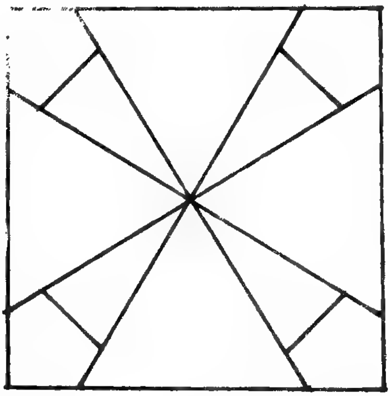


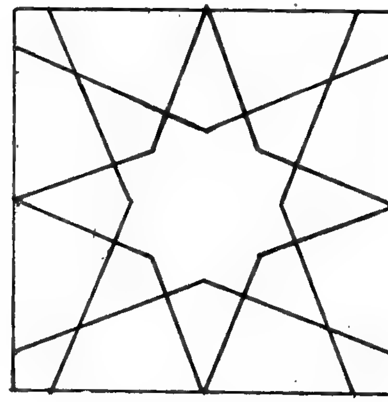
पहिल्या उदाहरणात चौरसावरील रेषा लांबट आकाराचे उभे आणि आडवे षट्कोन निर्माण करतात. आडवा षट्कोन पूर्ण आहे तर उभे षट्कोन अर्धे आहेत. चौरसाच्या प्रत्येक बाजूवर योग्य अंतर घेऊन अशी आकृती तुम्हाला सहज काढता येईल. असे अनेक चौरसाकृती तुकडे तयार करुन घ्या. आणि नंतर ते परस्परांना जोडा म्हणजे एक उत्कृष्ट नक्षी तयार होईल.

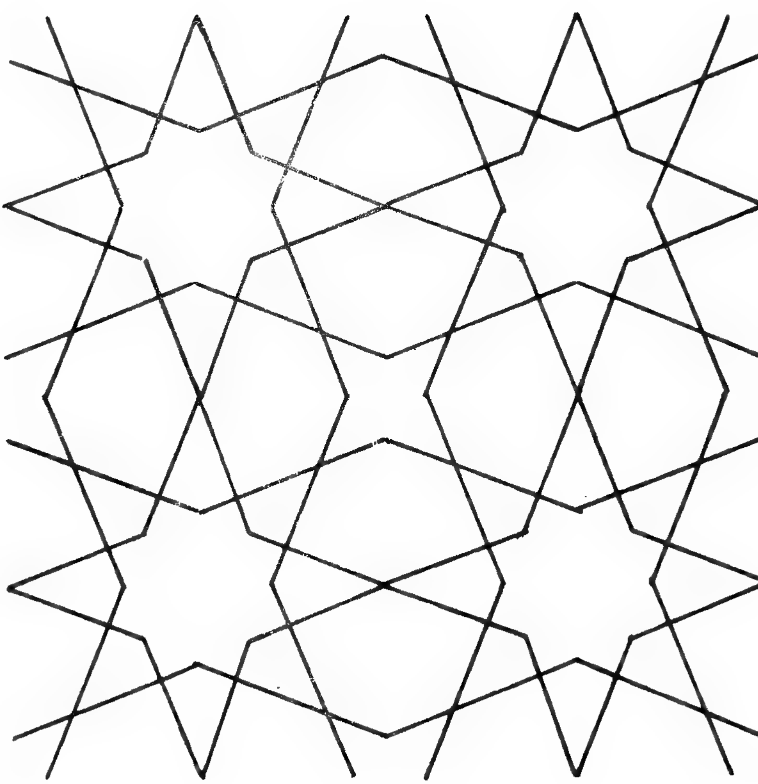
दुसऱ्या उदाहरणात चौरसावर अशाप्रकारे रेषा काढल्या आहेत की आकृतीत सर्व बाजूंनी समानता निर्माण व्हावी. कोणत्याही दिशेने ह्या आकृतीकडे पाहिलेत तर ती सारखीच दिसेल. असे अनेक चौरस काढून एकमेकाना जोडलेत की अगदी वेगळया प्रकारची उठावदार नक्षी निर्माण होईल.



तुम्ही स्वतःच अशा प्रकारच्या एखाद्या नक्षीचा विचार करु शकता. उदाहरण म्हणून आणखी एक आकृती पुढे दिली आहे. त्याप्रमाणे अनेक चौरस तयार करुन एकमेकांना जोडा आणि पहा कशी नक्षी तयार होते.

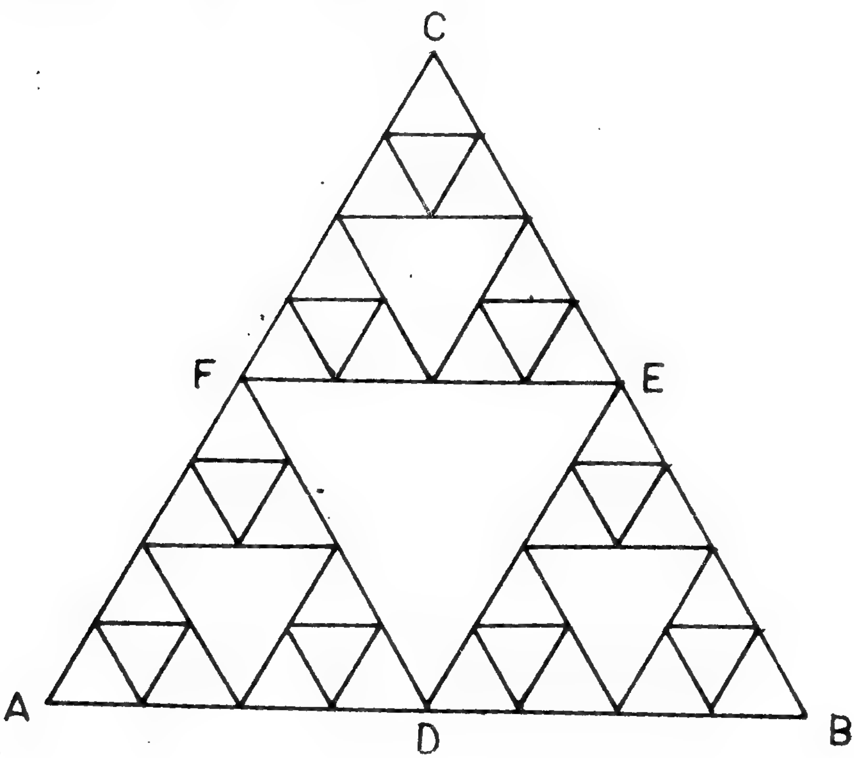






## ९ : सिअेरपिन्स्किचे गॅस्केट

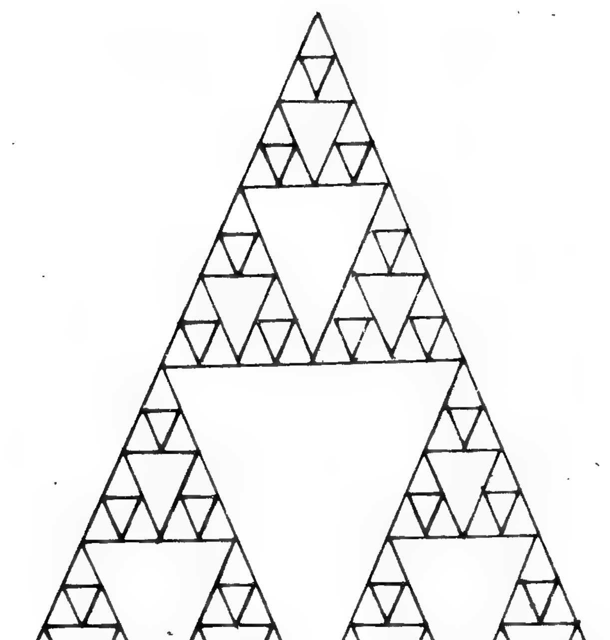
केवळ समभुज त्रिकोणांच्या सहाय्याने आपल्याला एक नमुनेदार आकृती तयार करायची आहे. त्यासाठी प्रथमतः ABC हा एक मोठ्या आकाराचा समभुज त्रिकोण काढून घ्या. त्यानंतर AB, BC आणि CA ह्या तीन रेषांचे अनुक्रमे D,E आणि Fहे तीन मध्यबिंदू निश्चित करा. हे तीन बिंदू सांधले की ABC ह्या मूळ समभुज त्रिकोणाचे चार समभुज त्रिकोणात रूपांतर होईल. आपल्याला मिळालेले चार नवीन समभुज त्रिकोण असे आहेत. ABF, DEF, DBE आणि FEC नीट लक्षपूर्वक पाहिलंत तर या चार त्रिकोणांपैकी DEF हा त्रिकोण उलटा आहे, असं तुम्हाला आढळेल. म्हणजे असं की ह्याचा पाया वरच्या बाजूला तर शिरोबिंदू खाली आहे. यापुढे उलट दिशेत असलेले समभुज त्रिकोण आपण विचारात घेणार नाही.



ADF, DBE आणिFEC या तीन समभुज त्रिकोणांच्या बाजूंचे मध्यबिंदू निश्चित करा आणि ते वरच्या प्रमाणेच परस्परांना जोडा. ह्या क्रियेनंतर प्रत्येक त्रिकोणाचे पुन्हा चार समभुज त्रिकोणात रुपांतर होईल. त्यापैकी एक उलटा असेल. आता त्रिकोणाच्या विभाजनाची ही क्रिया अशीच पुढे चालू ठेवा. प्रत्येक वेळी त्रिकोणाचा आकार लहान लहान होत जाईल. अर्थातच त्रिकोण विभाजनाची ही क्रिया केव्हातरी तुम्हाला थांबवावी लागेल. कारण त्रिकोण जसजसे लहान होत जातील तसतसे त्यांची विभागणी करणे अवघड होऊन बसेल.

एकदा आकृती तयार झाली की पाहिजेत ते रंग वापरुन तुम्ही एक विलक्षण नक्षकिाम तयार करु शकाल.

वरील आकृतीसाठी मूळ त्रिकोण समभुज असला पाहिजे, असा काही



नियम नाही. समद्वीभुज त्रिकोणाचा उपयोग करुनही तशाच प्रकारची आकृती काढता येते. जाता जाता ह्या वैशिष्ट्यपूर्ण आकृतीचे नाव सांगायला हरकत नाही. जरा चमत्कारिक आहे, पहा लक्षात रहाते का! ह्या आकृतीला म्हणतात 'सिअेरपिन्स्किचे गॅस्केट'.

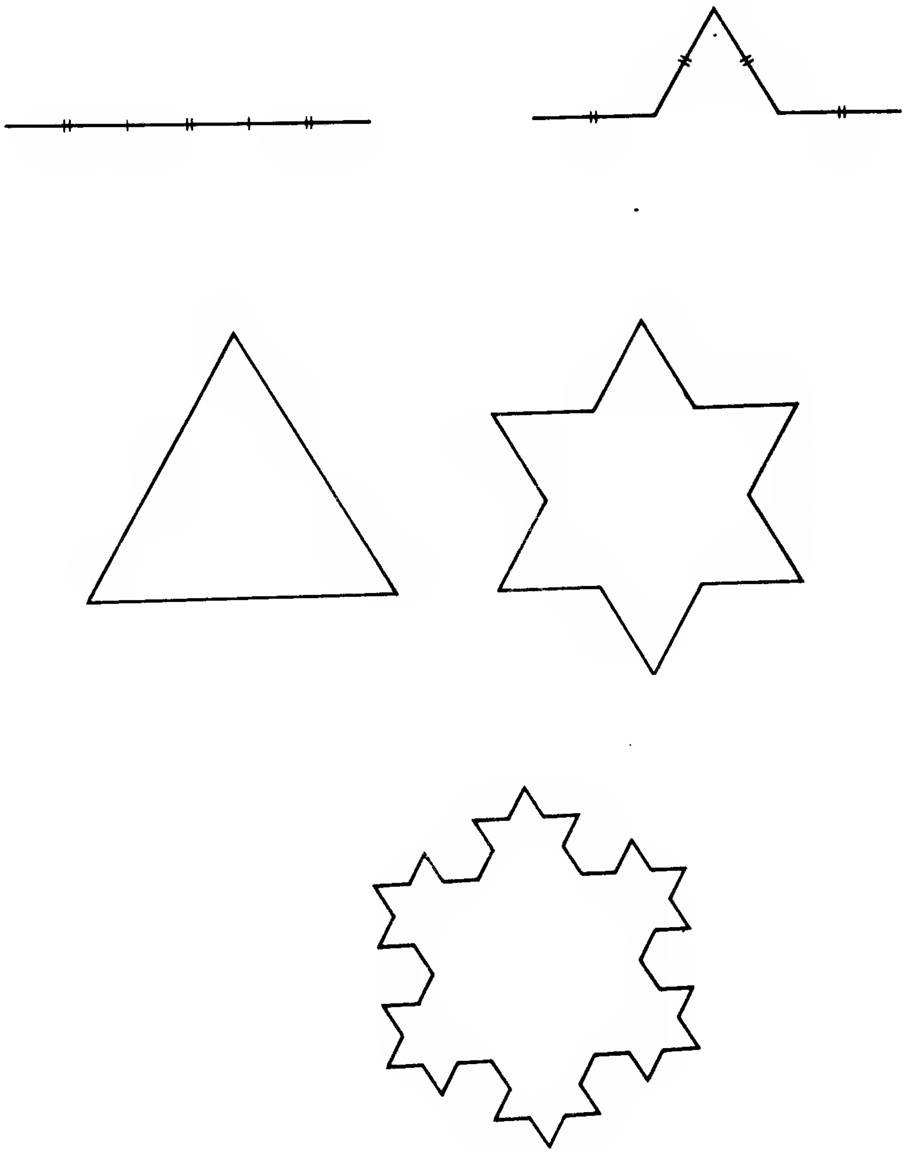
## ४० : कोख्‌ची हिमरेषा

फ्रॅक्टल्स नावाचा एक नवीन विषय भूमितीमध्ये आकार घेत आहे. असे म्हणण्यापेक्षा ह्या विषयाने आकार घेतला आहे, असेच म्हणणे योग्य ठरेल. भूमितीमध्ये एक प्रकारची विलक्षण अद्‌भूतता फ्रॅक्टल्सने निर्माण केली आहे. पूर्वी रटाळ वाटणारा भूमिती हा विषय आता एकदम मनोरंजक होत आहे. फ्रॅक्टल्स हा पूर्णतः गणिती सूत्रांवर अवलंबून असणारा विषय असल्यामुळे बराच अवघड आहे, पण त्याच्या सहाय्याने अक्षरशः अभूतपूर्व आकृत्या रेखाटता येतात. फक्त आपल्याजवळ उत्तम दर्जाचा संगणक हवा. फ्रॅक्टल्समध्ये एकाच गोष्टीची विशिष्ट नियमानुसार पुनरावृत्ती केलेली असते.'कोख्‌ची हिमरेषा' ही फ्रॅक्टल्समधीलच एक मनोरंजक आकृती आहे. ह्या आकृतीचे मूळ इंग्रजी नाव आहे 'कोखस्‌ स्नोफ्लेक' हिमस्फटिकासारखी ही आकृती दिसते. कोख्‌ हे एका गणितज्ञाचे नाव आहे.

कोख्‌ची हिमरेषा काढण्यासाठी प्रथम एक मोठ्या आकाराचा समभुज त्रिकोण काढणे आवश्यक आहे. ज्या कृतीची आपल्याला पुनरावृत्ती करायची आहे तो नियम असा :

प्रत्येक सरळ रेषेचे तीन समान भाग करा आणि त्यातील मधला भाग काढून टाका. त्याचे ऐवजी त्याच ठिकाणी, तेवढ्याच लांबीच्या ६० अंशाचा कोन असलेल्या दोन रेषा, मूळ रेषेच्या बाहेर काढा.

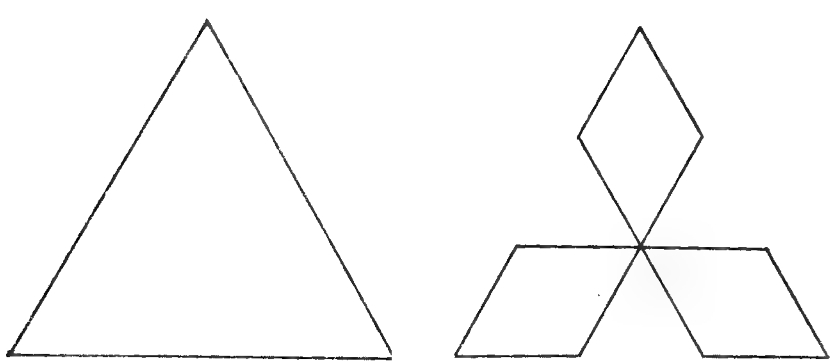
ही कृती वारंवार करीत असताना आपल्याला नवनवीन पण कमी लांबी असलेल्या रेषा मिळत जातील. मूळ समभुज त्रिकोणावर पहिल्या प्रथम वर दिलेल्या कृती केल्यानंतर तीन रेषांचे बारा रेषांत रुपांतर होते आणि दुसऱ्या कृतीनंतर आपल्याला ४८ रेषा मिळतात. पट्टी आणि पेन्सिलचा उपयोग करुन आपण वरील कृतीची तिसऱ्या वेळा पुनरावृत्ती करु शकणार नाही. पुढील पुनरावृत्तींसाठी संगणकाचाच आश्रय घ्यावा लागेल.

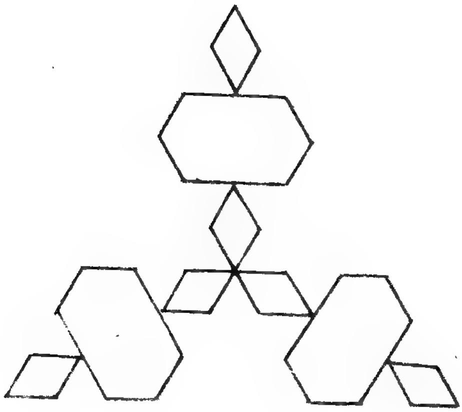


## ४१ : कोखची प्रतिहिमरेषा

कोखची हिमरेषा काढताना आपण समभुज त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा मधला एक तृतीयांश भाग दूर करुन, त्याच्या जागी रेषेच्या बाहेर तेवढीच बाजू असलेला समभुज त्रिकोण काढला होता. हीच क्रिया उलट दिशेत करता येईल. समभुज त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा मधला एक तृतीयांश भाग दूर करायचाच पण त्याच्या जागी रेषेच्या आतील बाजूने, तेवढेच बाजू असलेला आणखी एक समभुज त्रिकोण काढायचा. ही क्रिया केल्यावर नवीन, पण लहान आकाराचे समभुज त्रिकोण निष्पन्न होतील त्याच्यांवरही ह्याच क्रियेची पुनरावृत्ती करायची. अशा प्रकारे अनेक वेळा वारंवार कृती केल्यानंतर आपल्याला जी आकृती मिळेल त्यालाच कोखची प्रतिहिमरेषा असं नाव आहे.

वरील कृतीची पुनरावृत्ती करीत असताना दोन समभुज त्रिकोणांना एकच समान बाजू असेल तर ती बाजू आपल्याला सोडून द्यावी लागेल. प्रथम फार मोठा समभुज त्रिकोण काढून चिकाटीने वर दिलेली कृती वारंवार करीत राहिलात तर तुम्हाला एक अद्‌भुत आकृती मिळेल. सोबतच्या आकृतीत ह्या कृतीच्या फक्त दोनच पुनरावृत्ती दाखविल्या आहेत.



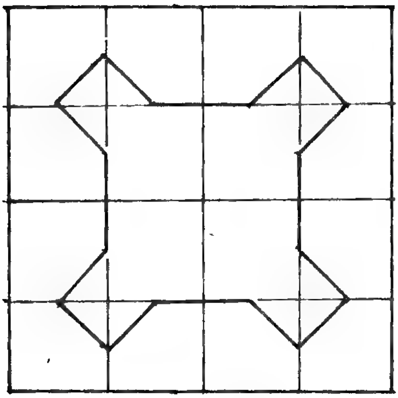
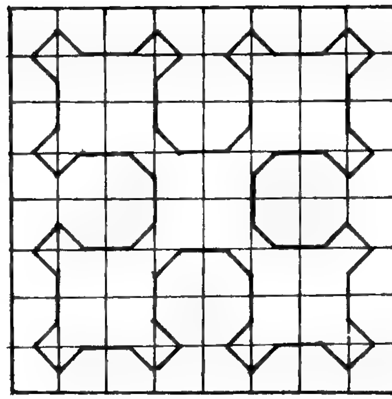


## ४२ : सिअेरपिन्स्किची हिमरेषा

हिमरेषा रेखाटण्याची कोखूची पद्धत आपण पाहिली. त्याच्या हिमरेषेचा आकार बराचसा बर्फाच्या स्फटिकासारखा दिसतो. सिअेरपिन्स्की नावाच्या गणितज्ञाच्या नावाने आणखी एक हिमरेषा प्रसिद्ध आहे. ही हिमरेषा चौरसात रेखाटायची आहे. कोखच्या हिमरेषेच्या तुलनेत ती रेखाटायलाही जरा अवघड आहे. मूळ आकृतीची एक वेळा पुनरावृत्ती करतानाच तुमची चिकाटी संपून जाईल. आणि पुढील पुनरावृत्तींसाठी तिला संगणकाच्या हवाली करण्याशिवाय आपल्याला गत्यंतर नाही.

सोबतच्या पहिल्या आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे मूळ चौरसाचे प्रथम चार समान विभाग करा म्हणजे तुम्हाला लहान आकाराचे चार चौरस मिळतील. आकृती रेखाटण्यासाठी ह्या चार चौरसांचे प्रत्येकी त्यांच्या विशिष्ट दोन बाजूंचे मध्यबिंदू निश्चित करुन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे ते जोडा. जी आकृती मिळेल तीच सिअेरपिन्स्कीच्या हिमरेषेची मूलभूत आकृती राहील.

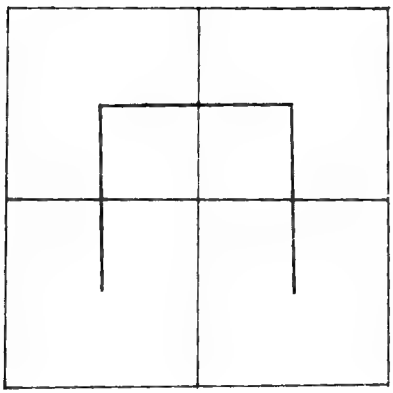
पहिल्या आकृतीत मूळ चौरसाचे आपण प्रथम चार समान विभाग केले

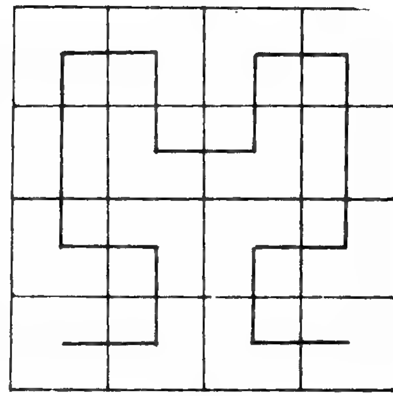
 

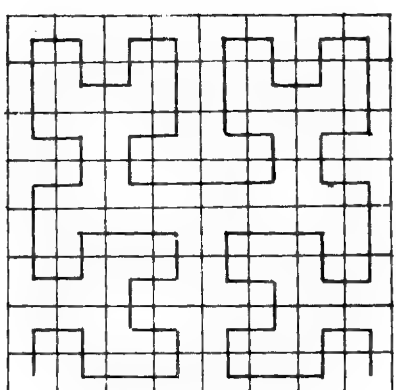
होते. दुसऱ्या पुनरावृत्तीसाठी त्या चार विभागांचे आणखी चार समान विभाग पाडा. आकृती रेखाटण्यासाठी त्यांचेही प्रत्येकी चार समान विभाग पाडणे आवश्यक आहे. म्हणजे वस्तुतः मूळ चौरसाचे एकूण 64 विभाग पडतात. आकृतीच्या दुसऱ्या पुनरावृत्तीत तुम्हाला पहिल्या आकृतीच्या चार प्रतिकृती काढता येतीलच पण त्याशिवाय मध्यभागी आणखी एक प्रतिकृती काढता येईल. ही केंद्रभागी असणारी प्रतिकृती इतर चार प्रतिकृतींशी दुसऱ्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे जोडून टाका. यापुढील पुनरावृत्तीसाठी आपल्याला संगणकाचे सहकार्य घेणे भाग आहे.

## ४३ : हिल्बर्टची क्षेत्रव्यापी वक्ररेषा

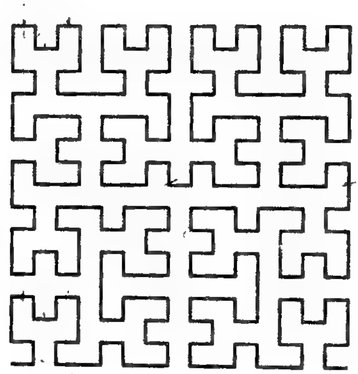
फ्रॅक्टल्स ह्या भूमितीच्या आधुनिक प्रकारातून ज्या अनेक मुलखावेगळ्या आकृत्यांचे सूतोवाच झाले त्यातीलच ही आकृती आहे. हिल्बर्ट या गणितज्ञाच्या नावावरुन त्याला 'हिल्बर्टची क्षेत्रव्यापी वक्ररेषा' असे नाव देण्यात आले आहे. ह्या वक्ररेषेचे मूळ इंग्रजी नाव आहे, 'हिल्बर्ट स्पेस् फिलींग कर्व्ह' ह्या वक्ररेषेचे वैशिष्ट्य असे की ती प्रत्येक चौरसाच्या केंद्रबिंदूमधून जाते. त्यासाठी मूळ वक्ररेषेची वारंवार पुनरावृत्ती करावी लागते. पट्टी पेन्सिलीचा वापर करुन आपण केवळ तीन वेळा अशी पुनरावृत्ती करु शकतो. ह्यापेक्षा जास्त वेळा पुनरावृत्ती करण्यासाठी संगणकच हवा.







सोबतच्या पहिल्या आकृतीत चौरसाचे एकंदर चार समान विभाग केले आहेत. हे चारही विभाग छोटे चौरसाच असणार हे सांगायला नकोच. आकृतीत प्रत्येक छोट्या चौरसाच्या केंद्रबिंदूमधून जाणारी एक वक्ररेषा काढली आहे. ही आहे, आपली मूलभूत आकृती. ह्याच आकृतीची आपल्याला वारंवार पुनरावृत्ती करायची आहे. दुसऱ्या आकृतीत प्रत्येक छोट्या चौरसाचे पुन्हा चार चार समान विभाग केले आहेत. म्हणजे मूळ चौरसाचे आता 16 चौरसात रुपांतर झाले आहे. आता वक्ररेषा काढताना ती ह्या सर्व 16 लहान चौरसांच्या केंद्रबिंदूमधून जायला हवी याची काळजी घेतली पाहिजे. त्यानंतर पुन्हा प्रत्येक लहान चौरसाचे प्रत्येकी चार चार समान विभाग करुन मूळ चौरसाचे एकंदर 64 लहान चौरसांमध्ये रुपांतर केले आहे. आपली वक्ररेषा ह्या सर्व 64 चौरसांच्या केंद्रबिंदूमधून गेली पाहिजे. आता ह्या 64 लहान चौरसांचे पुन्हा प्रत्येकी चार चार विभाग करणे आपल्याला शक्य नाही. ह्या पुढील वक्ररेषेची पुनरावृत्ती आपल्याला संगणकाकडेच सोपवायला हवी.

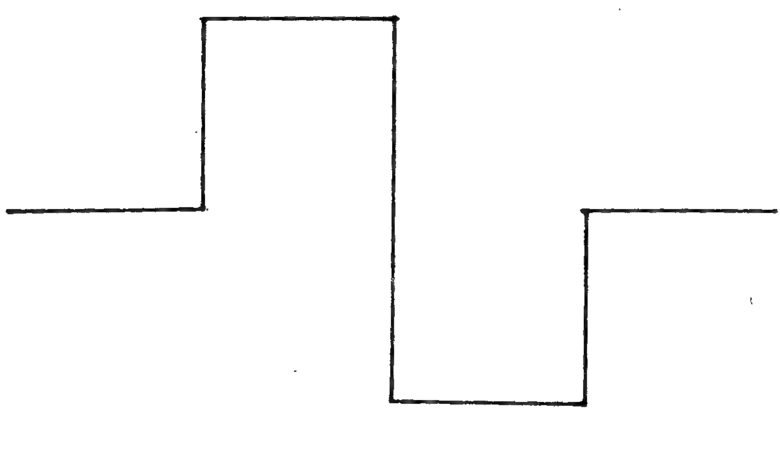


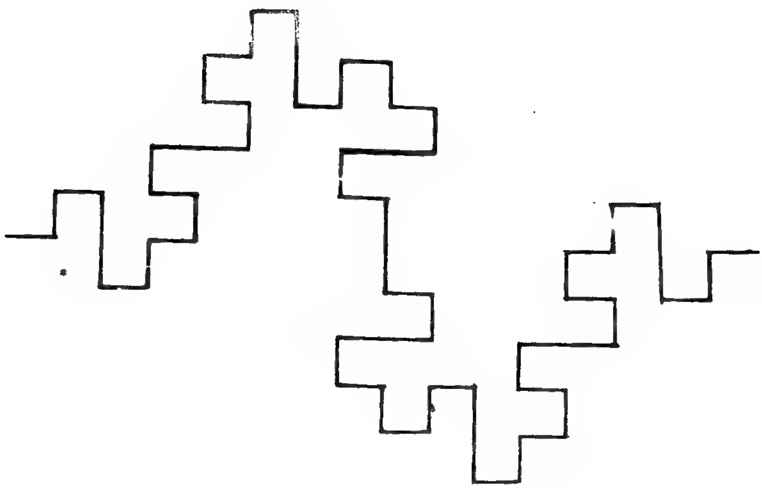
## ४४ : ड्रॅगन कर्व्ह ऊर्फ सर्पाकृती

फ्रॅक्टल्स ह्या भूमितीच्या प्रकाराने गणितात जणू काही एक क्रांती घडवून आणली. संगणकाने या क्रांतीला चांगलाच हातभार लावला. किंबहुना संगणकामुळेच गणितातील ही क्रांती यशस्वी झाली. फ्रॅक्टल्समधील आकृत्या केवळ हाताने रेखाटणे जवळ जवळ अशक्य आहे. कारण एका विशिष्ट नियमाने मूळ आकृतीची पुनरावृत्ती करणे हाच फ्रॅक्टल्सचा विशेष आहे.

फ्रॅक्टल्समध्ये अशीच एक गुतांगुतीची आकृती आहे. तिच्या आकारावरुन ह्या वशिष्ठ्यपूर्ण आकृतीला 'ड्रॅगन कर्व्ह' असे नाव आहे. ड्रॅगन कर्व्ह ज्या नियमाने काढला जातो तो नियम असा :

एका सरळ रेषेचे चार समान विभाग करा. त्यातील दुसरा व तिसरा विभाग दूर करुन त्यांच्या जागी तेवढीच बाजू असलेले दोन चौरस काढा. त्यातील एक चौरस रेषेच्या वर व दुसरा खाली असला पाहिजे. शेवटी ह्या चौरसाच्या रेषेलगत असणाऱ्या बाजू पुसून टाका. चौरस काढताना त्यांच्या तीनच बाजू काढल्या तरी चालतील.





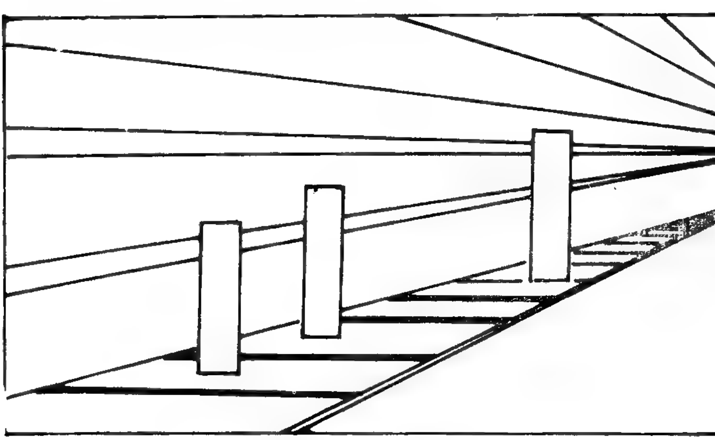
वरील नियमानुसार कृती केल्यानंतर तुम्हाला मूळ रेषेपासून समान लांबीच्या नागमोडी आकारात एकूण आठ रेषा मिळतील. ह्या सर्व रेषांवर पुन्हा वरील कृतीची पुनरावृत्ती करा. आता मूळ रेषेचे 64 समान भाग पडतील. आणि एकूण आकृतीच्या नागमोडीत आणखीन भर पडेल. बस्स ! केवळ पट्टीने आकृती काढताना तुम्ही ह्याच्या फारसे पुढे जाऊ शकणार नाही, कारण प्रत्येक वेळा रेषांच्या भागांचा आकार लहान लहान होत जाईल, हीच कृती तुम्ही संगणकाच्या ताब्यात दिलीत तर मात्र असंख्य नागमोडी वळणे असणारा ड्रॅगन कर्व्ह निर्माण होऊ शकेल.

## ४५ : दृष्टीभ्रम

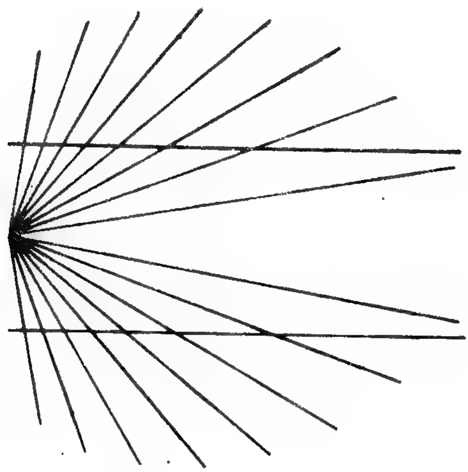
'दिसते तसे नसते म्हणून जग फसते' अशी एक म्हण आहे. दैनंदिन जीवनात आपल्याला त्यांचे अनेक वेळा प्रत्यंतर येते. दृष्टीभ्रमामुळे आपली फसगत होते. आपल्या डोळयासमोर घडलेल्या प्रसंगातील माणसे आपल्याला ओळखून काढता येत नाहीत. कित्येक वस्तू आणि प्राणी आपल्या रंगरुपामुळे आपल्याला चकवितात. दृष्टीभ्रमामुळे आपली बुद्धी योग्य निर्णय घेऊ शकत नाही. काही वेळा संभ्रम उत्पन्न झाल्यामुळे एखादी व्यक्ती स्वतःवर सकंटही ओढवून घेते.

आपल्या डोळयांना फसविणाऱ्या आणि भूल पाडणाऱ्या अनेक आकृत्या भूमितीमध्येही आहेत. अशा आकृत्या पाहून आपले डोळे मेंदूला भलतीच माहिती देतात. दृष्टीभ्रम निर्माण करणाऱ्या काही आकृत्या पुढे दिल्या आहते. त्या कशा काढल्या ते तुमच्या सहज लक्षात येईल. आकृत्यांच्या बाजूला दिलेल्या प्रश्नांचीच फक्त तुम्हाला उत्तरे द्यायची आहेत. पहा प्रयत्न करुन

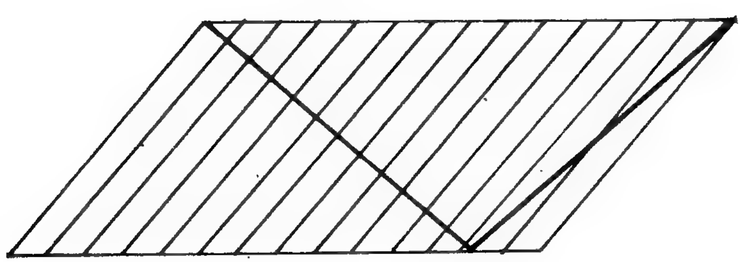
**आकृतीमधील सर्वात मोठा दंडगोल कोणता?**



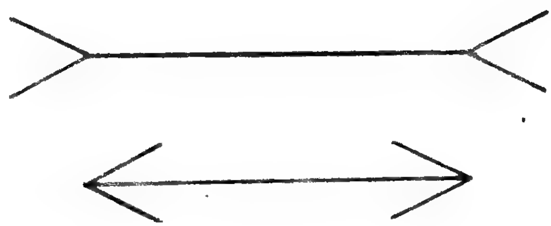
दोन रेषा समांतर आहेत काय?



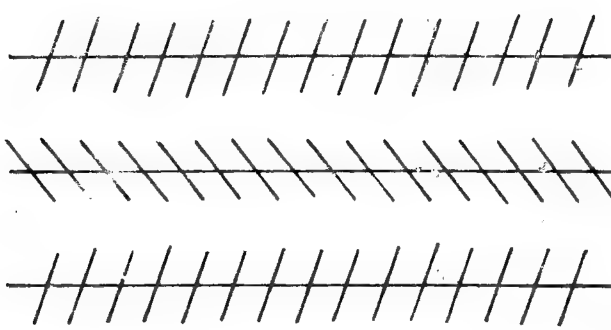
समांतरभुज चौकोनात काढलेल्या दोन ठळक रेषांपैकी मोठी कोणती ?



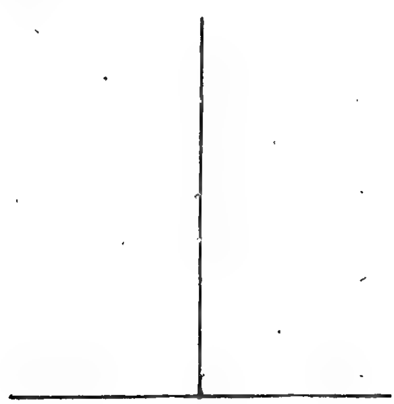
कोणती रेषा मोठी आहे ?



रेषा समांतर आहेत काय ?

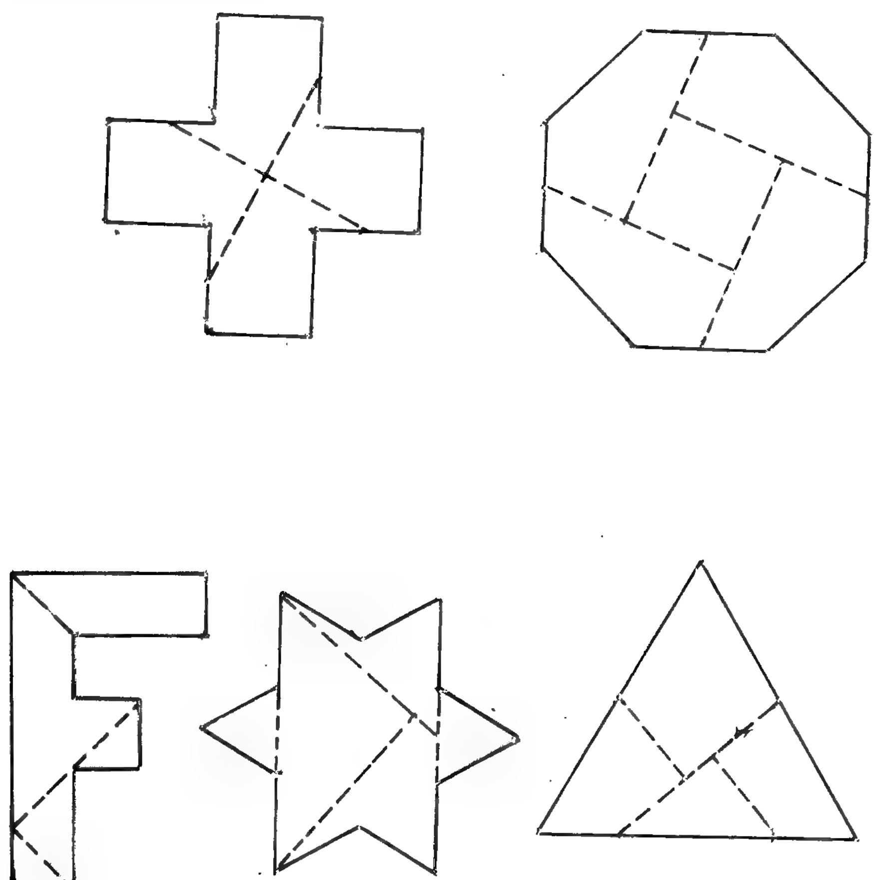


उभी रेषा मोठी की आडवी ?



## ४६ : कापा आणि चौरस बनवा

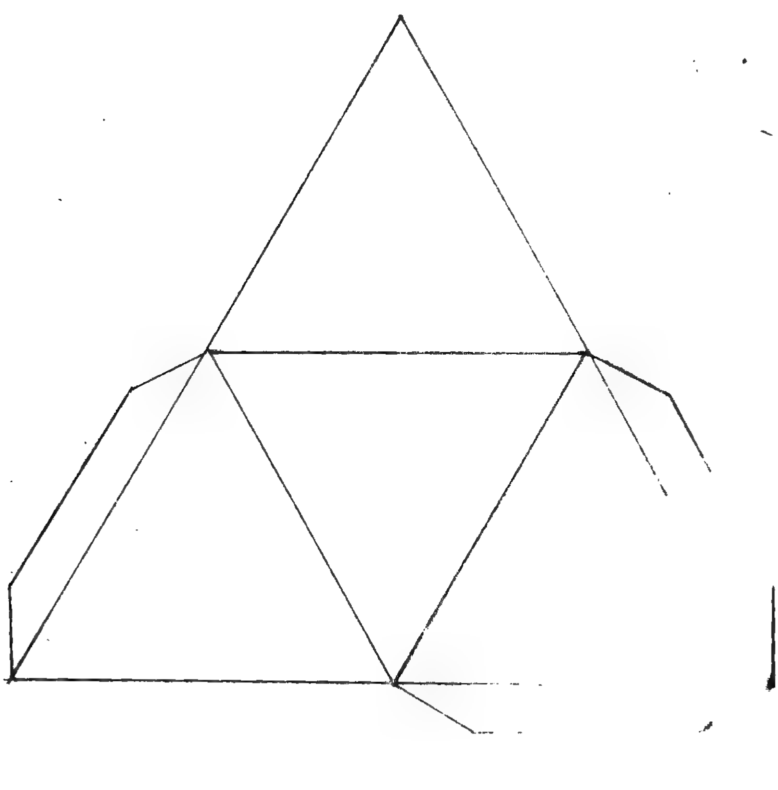
नियमीत षट्कोन, क्रॉस, इंग्रजी एफ् हे अक्षर, तारकाकृती आणि समभुज त्रिकोण अशा एकंदर पाच आकृत्या पुढे दिल्या आहेत. प्रत्येक आकृतीचे तुटक रेषांच्या सहाय्याने काही विभाग पाडले आहेत. अशाच प्रकारच्या आकृती तुम्ही स्वतः काढून घ्या. आणि प्रत्येक आकृती तुटक रेषांवर कापून तिचे तुकडे करा. प्रत्येक आकृतीचे तुकडे वेगवेगळे ठेवा बरं का! पण एका आकृतीचे तुकडे मिसळले तरी चालतील. आता पुढंच काम डोक्याचं आहे. प्रत्येक आकृतीचे तुकडे अशा प्रकारे जोडा की तुम्हाला चौरस मिळेल. प्रत्यक्ष करुन पाहिलंत की ह्या खेळातील मजा तुमच्या लक्षात येईल.



## ४७ : घनाकृती

ड्रॉइंग पेपरसारख्या जाड कागदांचा उपयोग करुन अनेकविध प्रकारच्या घन प्रतिकृती तयार करता येतात. पाश्चात्त्य शालेय शिक्षणातील ते एक महत्वाचे अंग आहे. घन आकृतींचे गुणधर्म समजण्यासाठी ह्या प्रतिकृतींचा चांगलाच उपयोग होते. आपल्या हस्तकौशल्याचीही त्यामध्ये कसोटी लागते. विविध आकाराच्या अक्षरशः शेकडो घन प्रतिकृती तयार करता येतील. त्यातील काही अगदी सोप्या तर काही अतीशय अवघड. जागेच्या मर्यादेमुळे आपल्याला केवळ तीन चार आकृत्यांचा विचार करता येईल.

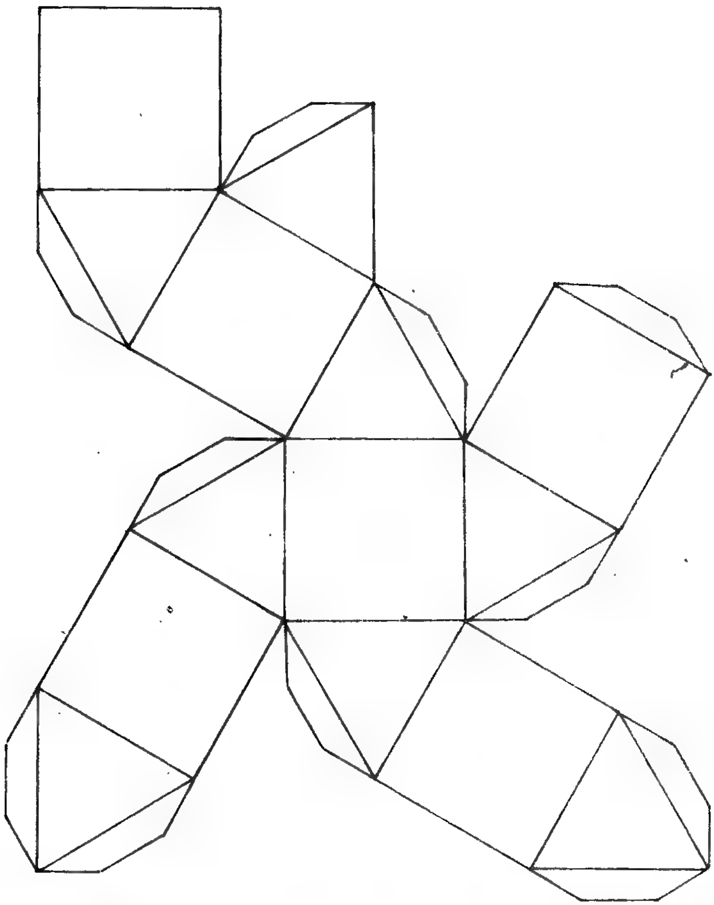
**पिरॅमिड :** खऱ्या अर्थातं तयार करायला सर्वात सोपी अशी ही आकृती आहे. ड्रॉइंग पेपरवर पाहिजे त्या आकाराचा एक समभुज त्रिकोण काढा.



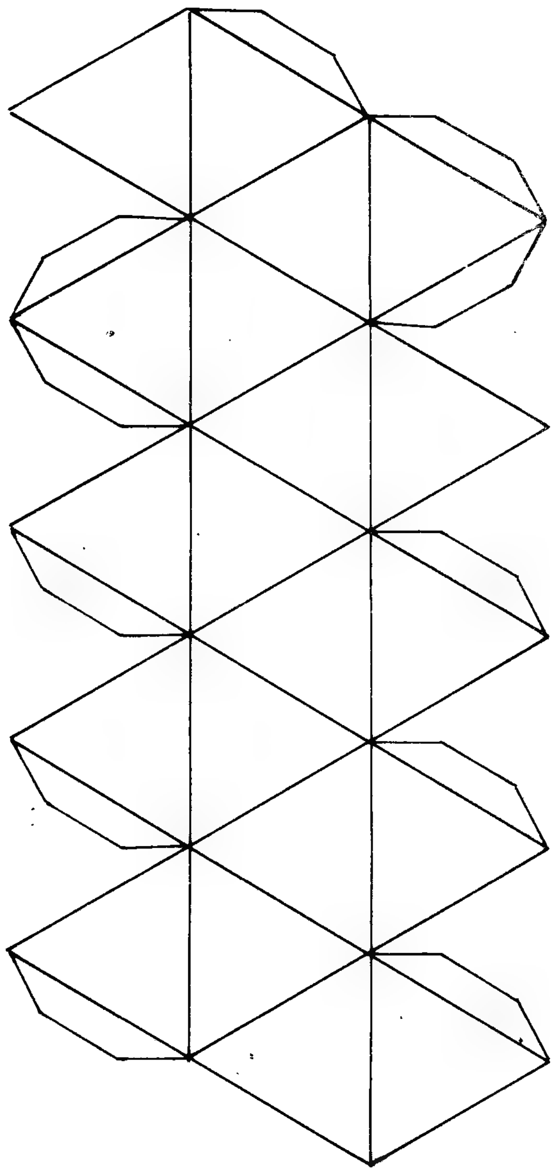
त्याच्या प्रत्येक बाजूचे मध्यबिंदू निश्चित करुन ते सांधा. म्हणजे मूळ समभुज त्रिकोणाचे चार समान समभुज त्रिकोण तयार होतील. कागद चिकटविण्यासाठी थोडी जागा सोडायला हवी. विशिष्ट बाजूंवर तशी जागा सोडून पूर्ण आकृती मूळ कागदावरुन कापून घ्या. सरतेशेवटी त्रिकोणांच्या ज्या बाजू समान आहेत तेथे घड्या घाला. व डिंकाच्या सहाय्याने पिरॅमिड जोडून घ्या. तुम्ही तयार केलेल्या पिरॅमिडचा पाया त्रिकोणी आहे याच पद्धतीने चौरस पाया असणारा पिरॅमिड तयार करता येतो का पहा.

**क्युबोक्टॅहेड्रॉन :** ह्या आणि अशा अनेक आकृत्यांना मराठीत नावे नाहीत, त्यामुळे क्युबोक्टॅहेड्रॉन हेच अवघड नाव वापरणे आपल्याला भाग आहे. सहा चौरस आणि आठ समभुज त्रिकोण ह्याचा सहाय्याने ही आकृती तयार करता येते. प्रथम एक चौरस काढून घ्या. नंतर त्याच्या प्रत्येक बाजूवर एक समभुज त्रिकोण काढा. तुम्हाला जे चार समभुज त्रिकोण मिळतील त्यांच्या एका बाजूवर चौरस काढा. नंतर चार पैकी तीन चौरसांच्या बाजूवर प्रत्येकी एक समभुज त्रिकोण काढा आणि सरतेशेवटी त्यापैकी एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूवर एक चौरस काढा. ही सर्व कृती सोबतच्या आकृतीवरुन तुमच्या लक्षात येईल. क्युबोक्टॅहेड्रॉन चिकटवून तयार करण्यासाठी ज्या ठिकाणी जागा सोडणे आवश्यक आहे, त्याही आकृतीत दर्शविल्या आहेत.

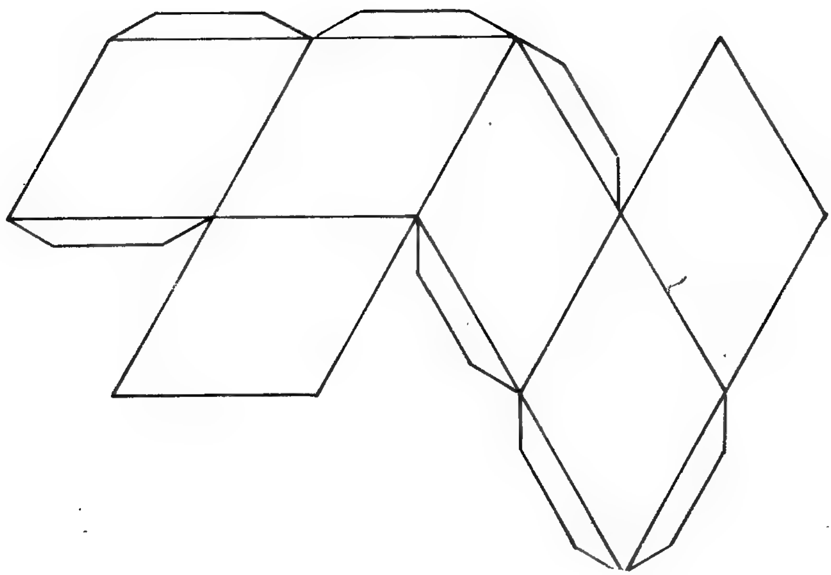
चौरस आणि त्रिकोण यांच्या ज्या बाजू समान आहेत तेथे घड्या घालून सर्व बाजूंनी आकृती चिकटवून घ्या. थोडी अवघड पण दिसायला आकर्षक अशी ही आकृती आहे.



**आयकोसॅहेड्रॉन :** नाव अवघड वाटलं तरी आखायला आणि तयार करायला ही आकृती सोपी आहे. ह्या आकृतीत एकंदर वीस समभुज त्रिकोणांचा उपयोग करण्यात आला आहे. हे त्रिकोण कसे आखायचे ते सोबतच्या आकृतीवरुन सहज लक्षात येईल. काही विशिष्ठ त्रिकोणांच्या बाजूवर चिकटविण्यासाठी जागा सोडावी लागेल. समान बाजूंवर घड्या घालून सर्वांगाने त्रिकोण जोडून चिटकवून टाकले की आयकोसॅहेड्रॉन तयार होईल. तयार झालेली आकृतीही आकर्षक असल्याचे तुम्हाला आढळेल.



900

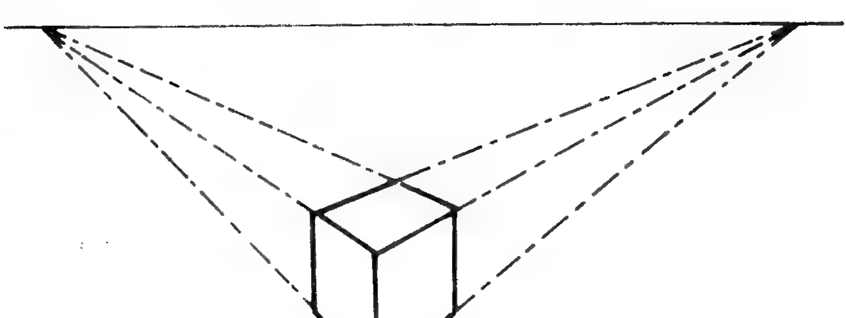


**ऱ्हॉम्बॉइड :** ऱ्हॉम्बस या शब्दाचा अर्थ पतंगाकृती असा होते. पतंगाकृती समांतरभु चौकोनाचाच एक विशिष्ट प्रकार आहे. त्यामध्ये समांतरभुज चौकानाच्या सर्व बाजू समान असतात. अशा ह्या ऱ्हॉम्बसच्या सहाय्याने केलेली आकृती म्हणून तिचे नाव आहे ऱ्हॉम्बॉइड. निसर्गातील काही स्फटिकांचा आकार ऱ्हॉम्बोइडसारखा असतो. आकृतीत दाखीवल्याप्रमाणे एकंदर सहा पतंगाकृती आखून घ्या. त्यापैकी ज्यांच्या बाजूवर चिटकविण्यासाठी जागा सोडायची आहे, त्याही आकृतीत दर्शविल्या आहेत. वरीलप्रमाणेच समान बाजूंवर घड्या घालून सर्व बाजूंनी आकृती चिटकवून टाका.

## ४८ : यथार्थदर्शन वस्तुचित्र

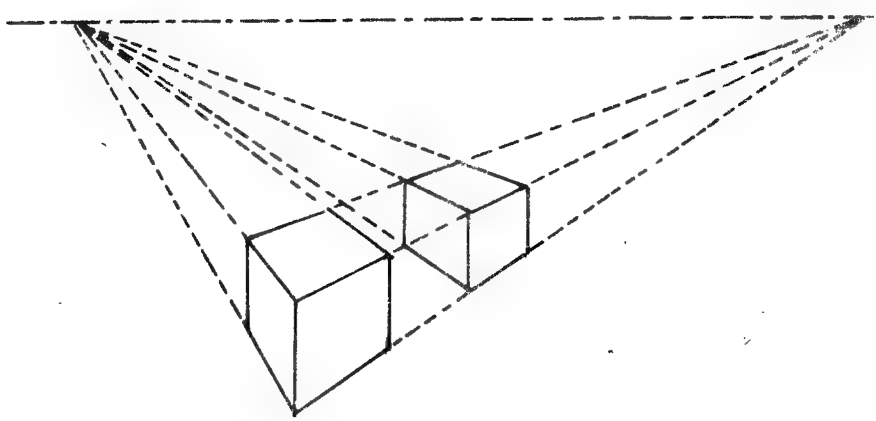
एखादी वस्तू जशी असते तशी ती हुबेहुब आपल्याला कधीच दिसत नाही. विशेषतः वस्तू आपल्यापासून दूर असेल तर तिच्या आकाराचा अंदाजही आपल्याला करता येत नाही. एखाद्या ठोकळ्याच्या चारही बाजू चौरसाकृती असतात पण आपल्याला त्या चौकोनासारख्या भासतात. चित्रकलेत मात्र आपल्याला एखादी वस्तू जशी दिसते तशीच ती काढावी लागते. अर्थातच मूळ आकृतीत पुष्कळच बदल करावा लागतो. वस्तू जशी दिसते तशीच कशाप्रकारे काढायची? ह्याचेही एक शास्त्र आहे त्याचं इंग्रजी नाव आहे 'परस्पेक्टिव्ह' यथार्थदर्शनवस्तुचित्र असं त्यांच मराठी नामकरण करता येईल.

समजा आपण काही अंतरावरुन एका घन ठोकळयाकडे पहाणार असू तर तो ठोकळा आपल्याला नेमका कसा दिसेल, ह्याचा आपल्याला अंदाज करायचा आहे. त्यासाठी प्रथम्र आपल्याला आपली डोळयांची पातळी निश्चित करावी लागेल. ह्या पातळीचं शास्त्रीय नाव आहे. 'चक्षुप्रतल' किंवा 'आय लेव्हल'. सोबतच्या आकृतीमधील आडवी सरळ रेषा चक्षुप्रतल दर्शवते. आपल्याला ठोकळ्याचे तीन पृष्ठभाग दिसणार असतील तर त्यांच्या समोरासमोरील बाजू चक्षुप्रतलापर्यंत वाढविल्या की त्या एकाच बिंदूत मिळतात असे आपल्या लक्षात येईल. अशा बिंदूना इंग्रजीत 'व्हॅनिशिंग पॉइंट' असं नाव आहे. मराठीत त्यांना आपण शून्य बिंदू असे नाव देणार आहोत. चक्षुप्रतल व शून्य बिंदू निश्चित झाले की आपण ठोकळयाचे यथार्थ चित्रण करु शकू. मूळ वस्तूचे सर्व पृष्ठभाग चौरसाकृती असले तरी यथार्थ चित्रणात ते तसे दिसत नाहीत.



अनेकदा एक वस्तू दुसऱ्या वस्तुच्या संदर्भात कशी दिसेल ह्याचा अंदाज घ्यावा लागतो. अशा वेळी दोन्ही वस्तूंचे शून्य बिंदू एकच असतात पण समोरासमोरील बाजूंचे शून्य बिदूपाशी होणारे कोन निरनिराळे असू शकतात. सोबतच्या आकृतीत एक ठोकळा दुसऱ्याच्या बाजूला काही अंतरावर आहे. ह्या ठिकाणी दोन्ही ठोकळयांचा वरच्या पृष्ठभाग डावीकडील शून्यबिंदूपाशी एकच कोन करीत आहे, पण दोन्ही ठोकळयाच्या बाजूंनी उजवीकडील शून्यबिंदूपाशी केलेले कोन वेगळे आहेत.

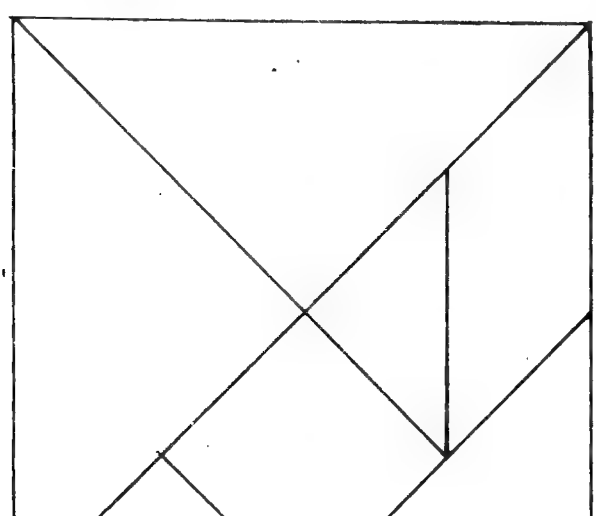
यथार्थवस्तुचित्रणाची ही पद्धत वापरुन तुम्हाला वस्तुंचे विकृत झालेले आकार योग्य प्रकारे रेखाटता येतील.

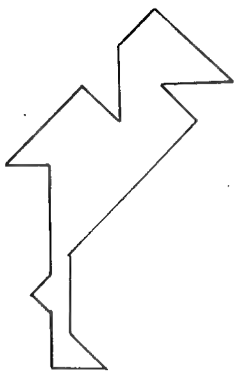


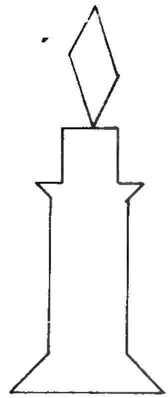
## ४९ : धूर्त मनुष्याचे सात फलक ऊर्फ टॅनग्रॅम

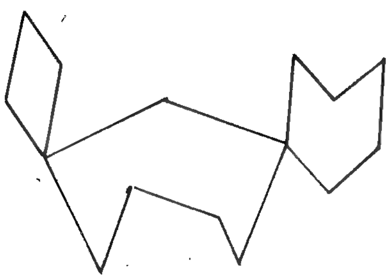
टॅनग्रॅम हा एक भूमितीच्या आधाराने बसविलेला गणिती खेळ आहे. सुमारे चार हजार वर्षे हा खेळ चीनमध्ये प्रचलीत आहे. चिनी भाषेत ह्या खेळाचे नाव आहे 'धूर्त मनुष्याचे सात फलक ' टॅनग्रॅम हा बुद्धीला आव्हान देणारा खेळ आहे. त्यामध्ये निरनिराळया आकाराचे एकूण सात ठोकळे असतात. त्यांच्या सहाय्याने मनुष्य, पक्षी, प्राणी, व्यवहारातील वस्तू यांचे अक्षरशः शेकडो आकार बनविता येतात. खऱ्या अर्थाने मनाला वेड लावणारा हा गणिती खेळ आहे.

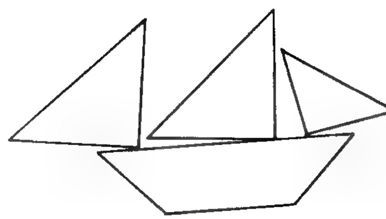
टॅनग्रॅमचे सात तुकडे तयार करण्यासाठी जाड पुठ्ठ्यावर एक चौरस आखून घ्या आणि त्यावर आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे रेषा काढा. ह्या रेषांच्या अनुषंगाने पुठ्ठा कापा म्हणजे तुम्हाला हवे असलेले सात तुकडे मिळतील त्यात निरनिराळ्या आकाराचे पाच त्रिकोण, एक चौरस व एक समांतरभुज चौरस यांचा समावेश आहे. टॅनग्रॅमच्या सहाय्याने बनविता येतील अशा पाच आकृत्या पुढे दिल्या आहेत. त्या प्रथम बनविण्याचा प्रयत्न करा. त्यानंतर काही आकृत्यांमध्ये तुकडे कसे जोडायचे ह्याचे मार्गदर्शन केले आहे ते लक्षपूर्वक पहा आणि तुम्ही स्वतःच अनेक आकृत्या डोळ्यासमोर आणून त्या टॅनग्रॅमच्या सात तुकड्यांनी तयार करता येतात का पहा. ह्या खेळात प्रत्येक आकृतीसाठी सातही तुकडे वापरलेच पाहिजेत, अशी एक महत्त्वाची अट आहे, ती मात्र लक्षात ठेवा.

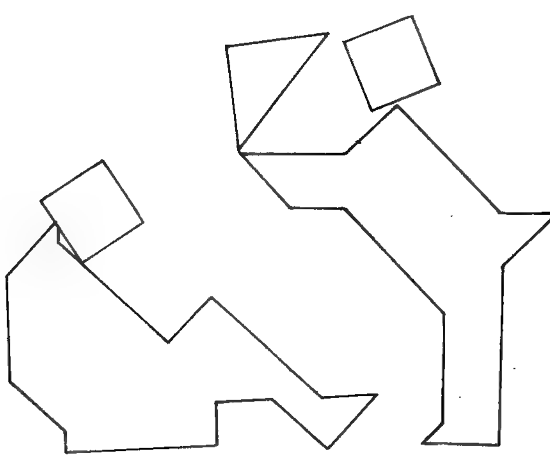












## ५० : अनंत आकृतीबंधांचा कर्ता, एक साधा नियम

पॅटर्न ह्या इंग्रजी शब्दाचे आपण आकृतीबंध असे मराठी नामकरण केले आहे. एकाच कृतीची वारंवार पुनरावृत्ती केली की विशिष्ट आकृतीबंध निर्माण होतो, पण बऱ्याच वेळा ही कृती फार अवघड असते. विविध प्रकारचे अक्षरशः असंख्य आकृतीबंध निर्माण करण्यासाठी फ्रॅन्क ओल्ड नावाच्या गणितज्ञाने एक अगदी साधा नियम सुचविला आहे. फ्रॅन्क ओल्डचा नियम असा :

✤ कोणताही एक बिंदू व एक दिशा निवडा आणि पुढील सूचनांचे अनुसरण करा.

✤ एक एकक अंतरातून पुढे जा,

✤ डावीकडे वळा.

✤ दोन एकक अंतरातून पुढे जा

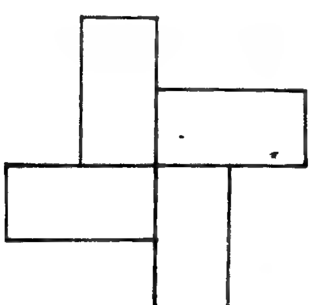
✤ डावीकडे वळा

✤ तीन एकक अंतरातून पुढे जा

✤ डावीकडे वळा.

✤ वरील सूचनांची पुनरावृत्ती करा.

सूचनांमधील एकक हे अंतर १, २, ३ किंवा कितीही सेन्टीमीटर असू शकते. सूचनांमधील हालचाल मात्र त्याच पटीत करायला हवी.

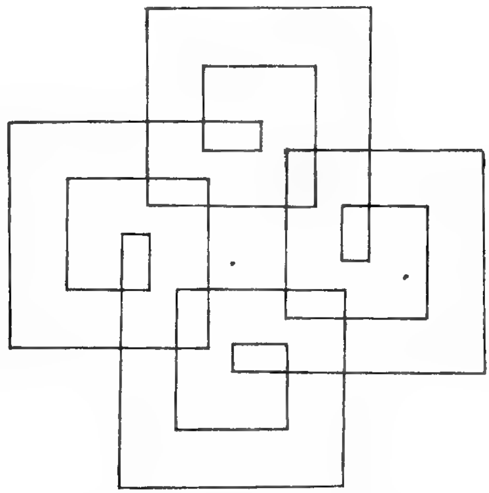


वर दिलेल्या सुचनांची चार वेळा पुनरावृत्ती झाली की तुम्ही मूळ बिंदूपाशी येऊन पोहोचाल. ह्या सूचनांमधील प्रत्येक वळण 90 अंशाचे आहे व प्रत्येक हालचाल आपण निवडलेल्या एककाच्या १, २ व ३ पटीत आहे. त्यामुळे वरील सूचनाक्रम अंत्यत त्रोटक भाषेत पुढीलप्रमाणे लिहिण्यात येतो :

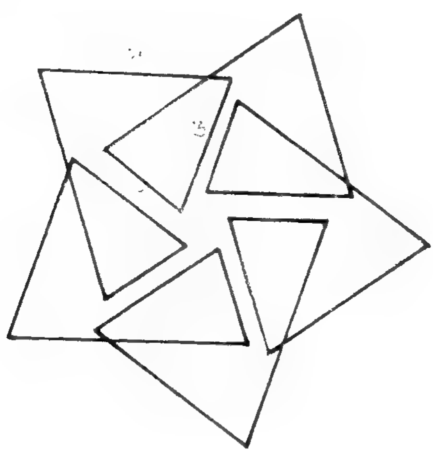
($90^{o}$: 1, 2, 3) तुम्हाला मिळणारा आकृतीबंध असा असेल.

फ्रॅन्क ओल्डच्या नियमातील वळण्याचा कोन आणि हालचालींची एककाच्या पटीतील पुनरावृत्ती बदलता येते, उदाहरणार्थ आपण (90 : 2, 3 . 5, 6, 7, ८,

9) असा सूचना क्रम दिला तर आपल्याला पुढील आकृतीबंध मिळेल.



समजा आपला सूचनाक्रम (72 : 2, 3, 4, 5) असा असेल तर आपल्यात मिळणारी आकृती पुढील आकार घेईल.

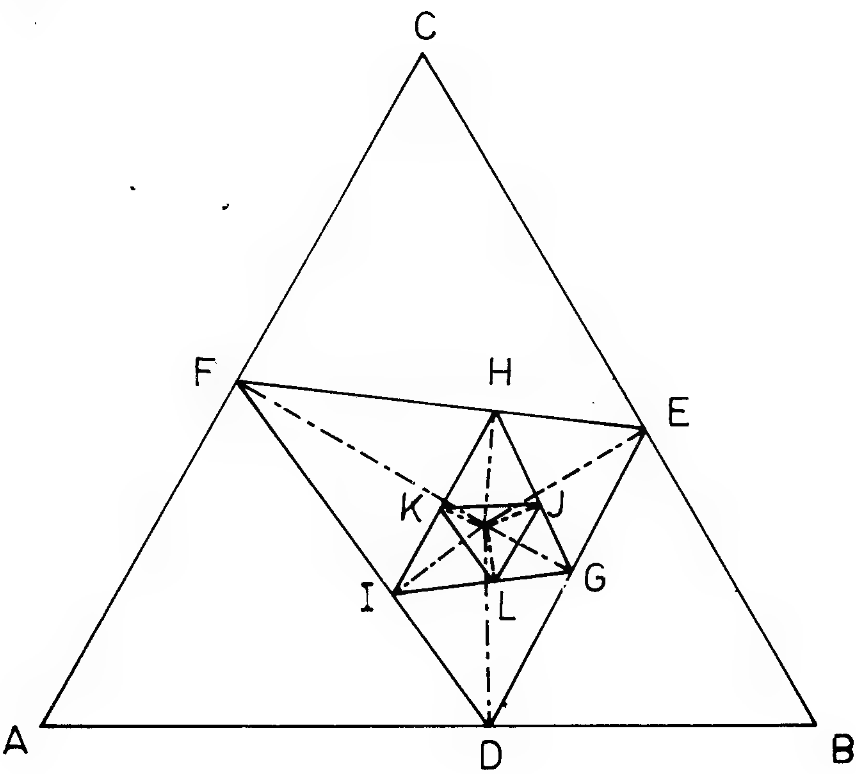


ह्याच पद्धतीने तुम्ही स्वतःचा सूचनाक्रम तयार करुन विविधप्रकारचे आकृतीबंध रेखाटू शकाल.

## ५१ : आणखी काही मनोरंजक निष्कर्ष आणि रचना

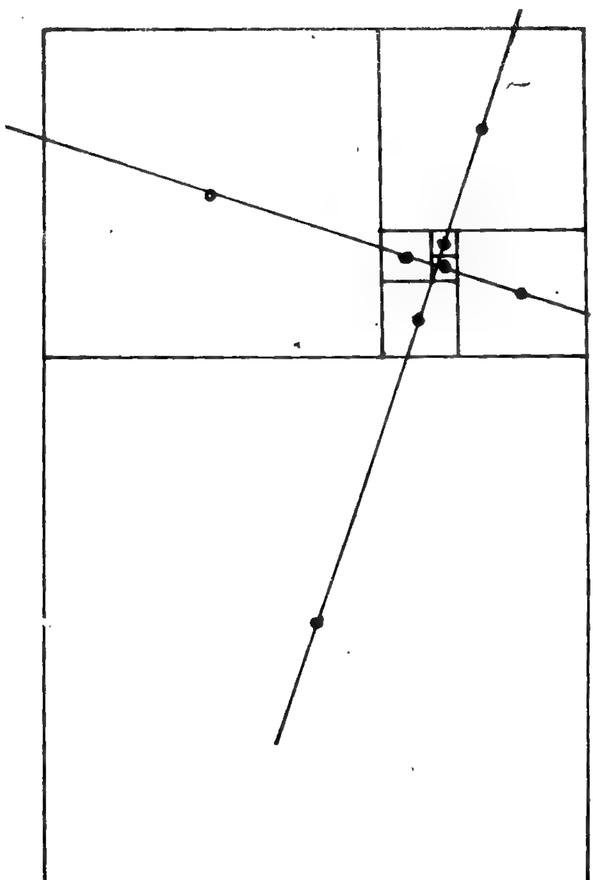
### १) त्रिकोणात त्रिकोण :

कोणत्याही आकाराचा ABC हा त्रिकोण काढा. त्यात कुठेही P हा बिंदू निवडा. P ह्या बिंदूपासून AB, BC, CA ह्या बाजूंवर अनुक्रके PD, PE आणि PF हे लंब टाका. नंतर DEF हे बिंदू जोडून एक त्रिकोण तयार करा. त्यानंतर पुन्हा P ह्या बिंदूपासून DE, EF आणि FD ह्या बाजूंवर अनुक्रमे PG, PH आणि PI हे लंब टाकून GHI हा एक नवीन त्रिकोण तयार करा. याच पद्धतीने तयार केलेला तिसरा त्रिकोण ABC ह्या मूळ त्रिकोणासमान आहे असे तुमच्या लक्षात येईल. हीच पद्धत वापरुन पुढील त्रिकोण काढता आले तर तीनाच्या पटीत असणारे, म्हणजे सहावा, नववा वगैरे त्रिकोण मूळ त्रिकोणासमान असतात.



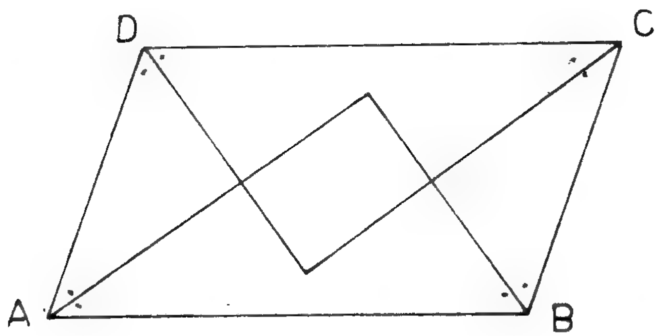
## २) सुवर्ण आयतातील रेषांचा छेद

१३ सेन्टीमीटर लांब व ८ सेन्टीमीटर रुंद असा एक आयत काढा. त्याच्या लांबीरुंदीचे गुणोत्तर १.६ असल्यामुळे तो सुवर्ण आयत आहे. नंतर त्याचे 8 X 8 चा चौरस व 5 X 3 चा आयत असे दोन भाग करा. 5 X 3 चा आयत हाही सुवर्ण आयत आहे. त्याचे 3 X 3 चा चौरस व 3 X 2 चा आयत असे पुन्हा विभाग करा. ही क्रिया शक्य असेल तेवढ्या लहान आयतापर्यंत करीत रहा. त्यानंतर प्रत्येक चौरसाचे केंद्रबिंदू निश्चित करा. हे सर्व बिंदू काटकोनात असणाऱ्या दोन रेषांवर पडतात. असे तुम्हाला आढळेल.



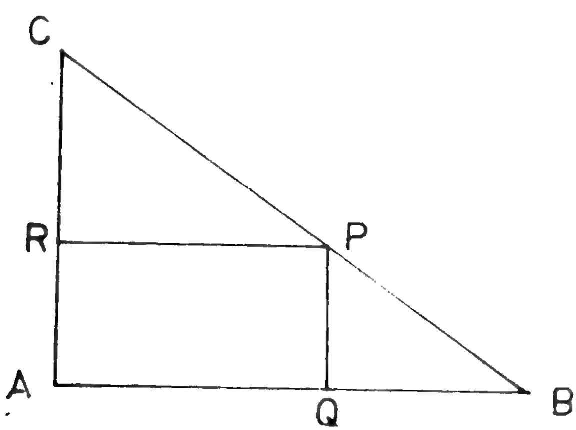
## ३) समांतरभुज चौकोनात आयत.

कोणत्याही आकाराचा ABCD हा समांतरभुज चौकोन काढा. नंतर त्याच्या चारही कोनांचे दुभाजक काढून ते पुढे वाढवा. ह्या सर्व रेषा समांतरभुज चौकोनाच्या मध्यावर एक आयत निर्माण करतात. समांतरभुज चौकोनाच्या चारही बाजू समान असतील तर मध्यभागी चौरस तयार होईल.




## ४) काटकोन त्रिकोणात आयत.

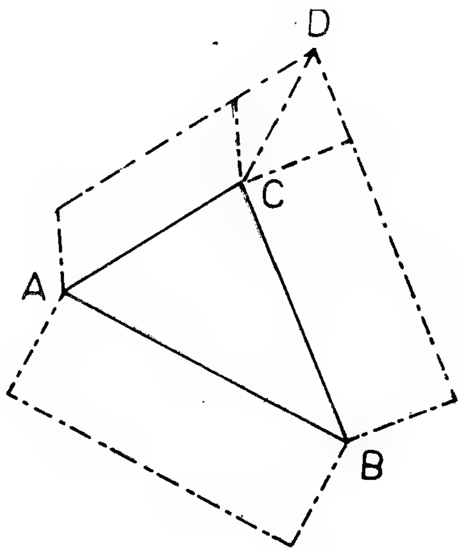
कोणत्याही बाजू असलेला ABC हा एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याच्या BC ह्या कर्णावर कुठेही P हा बिंदू निवडा. P ह्या बिंदूवरुन AB व CA ह्या बाजूंवर PQ आणि QR हे लंब टाका. हे दोन लंब PQAR असा एक आयत तयार करतील. अशा प्रकारे तयार झालेल्या आयतीची परिमिती AB आणि AC ह्या बाजूंच्या बेरजे एवढी असते.




PQ + QA + AR + RD = AB + AC !

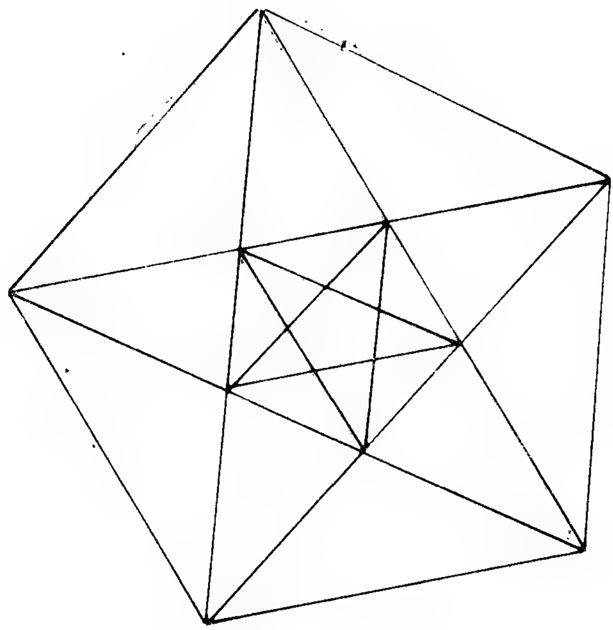
५) त्रिकोणावर समांतरभुज चौकोन :

ABC हा कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढा. त्याच्या AC आणि BC ह्या बाजूंवर कोणत्याही आकाराचे दोन समांतरभुज चौकोन काढा. त्यांच्या बाहेरील बाजू वाढवून त्या ज्या बिंदूत मिळतील त्याला D हे नाव द्या. D आणि C हे बिंदू सांधा. नंतर त्रिकोणाच्या AB ह्या बाजूवर CD ह्या रेषेला समांतर व तेवढ्याच लांबीच्या रेषा A आणि B ह्या बिंदूपासून काढा. त्यांची टोके जोडली की AB वर आणखी एक समांतरभुज चौकोन तयार होईल. ह्या समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ AC व BC बाजूंवर काढलेल्या समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेएवढे असेल पाहिजे.



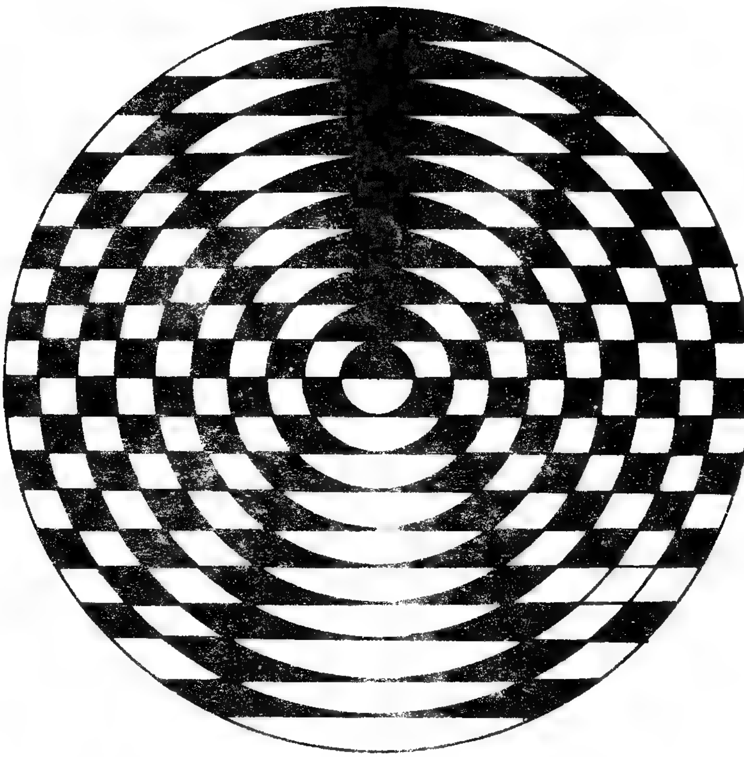

६) पंचकोनापासून तारकाकृती :

नियमीत पंचकोनाच्या बाजू पुढे वाढविल्या की एक पंचकोनी तारकाकृती तयार होते. ह्या तारकाकृतीची टोके जोडली की एक नवीन नियमीत पंचकोन तयार होतो. तो मूळ पंचकोनाच्या बरोबर उलटा असतो. ह्या कृतींची अनेक वेळा पुनरावृत्ती करुन उलटे व सुलटे पंचकोन व तारकाकृती तयार करता येतात.



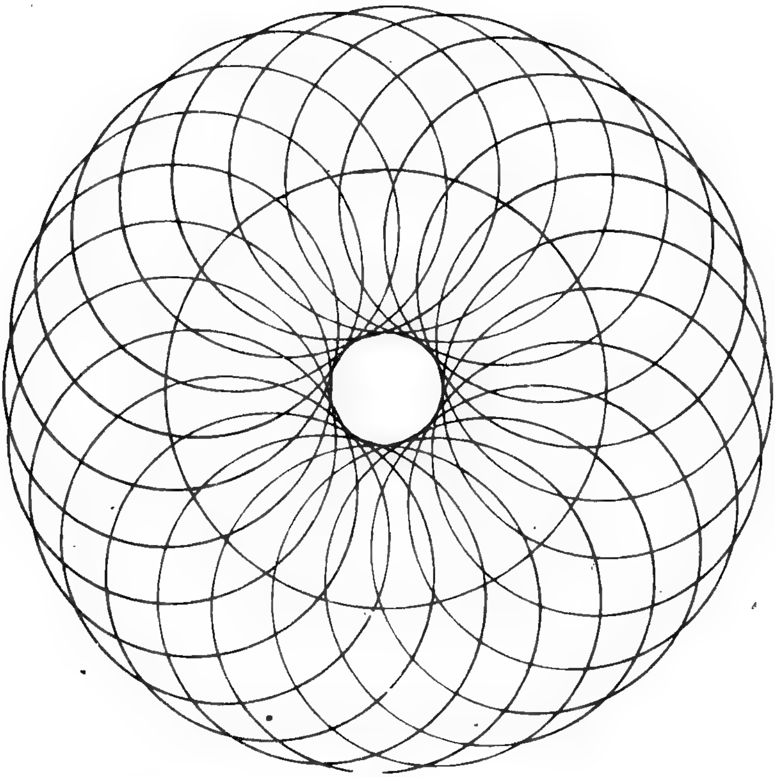
**७) समकेंद्री वर्तुळांमध्ये समांतर रेषा :**

समकेंद्री वर्तूळे काढण्यासाठी एक केंद्रबिंदू निवडा आणि सर्वात मोठ्या त्रिज्जेच्या वर्तुळापासून प्रारंभ करुन समान अंतराने वर्तुळाच्या त्रिज्जा कमी करा आणि एकात एक अशी अनेक वर्तुळे काढा. ह्या समकेंद्री वर्तुळात अनेक समांतर रेषा काढायच्या आहेत. त्यांचेमधील अंतर वर्तुळांच्या त्रिज्जांमधील अंतराएवढेच ठेवायला हवे. वर्तुळाच्या त्रिज्जांमध्ये अर्ध्यासेंटीमीटरचे अंतर असेल तर समांतर रेषांमध्ये तेवढेच अंतर ठेवा. प्रथम वर्तुळांच्या केंद्रातून जाणारी व वर्तुळांचे बरोबर दोन भाग करणारी केंद्ररेषा काढून घ्या व नंतर तिच्या वर आणि खाली अर्ध्यासेंटीमीटरच्या अंतराने समांतर रेषा काढा. पूर्ण झालेल्या आकृतीत विविध आकाराचे अनेक विभाग निर्माण झालेले दिसतील ते एक आड एक रंगवा म्हणजे एक वेगळाच आकृतीबंध निर्माण होईल.



**८) वर्तुळावर वर्तुळे :**

सुयोग्य व्यासाचे एक वर्तुळ काढा व त्याच्या परिघाचे समान भाग करा. वर्तुळाचे १५ अंशाचे विभाग केले तर परिघवर एकूण २४ बिंदू मिळतील. परिघावरील हे बिंदू केंद्र आहेत असे मानून समान व्यासाची २४ वर्तुळे रेखाटा. आकृती तयार होत असतानाच एक मनमोहक आकृतीबंध निर्माण होत आहे असे तुमच्या लक्षात येईल.



## ९) त्रिकोणाच्या नऊ बिंदूमधून जाणारे वर्तुळ

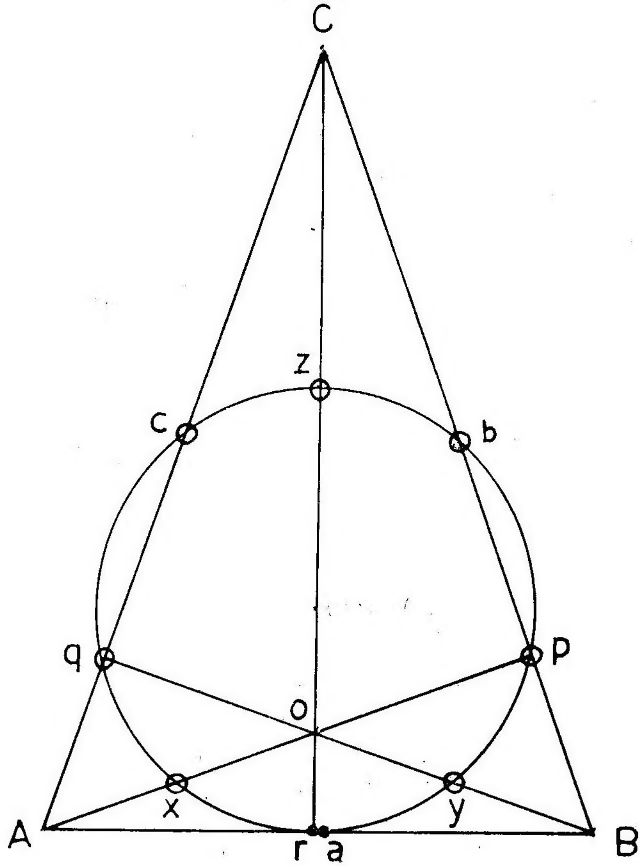
ABC हा कोणत्याही आकाराचा एक त्रिकोण काढा. त्यावर पुढील बिंदू निश्चित करा.

★ AB, BC, CA ह्या तीन बिंदूचे अनुक्रमे a,b,c हे मध्यबिंदू.

★ A,B आणि C ह्या बिंदूवरुन BC, CA आणि AB ह्या बाजूंवर टाकलेल्या लंबांचे अनुक्रमे p,q आणि r हे छेदनबिंदू तसेच हे तीन लंब ज्या बिंदूत परस्परांना छेदतात तो O छेदनबिंदू.

★ OA, OB आणि OC ह्या तीन रेषा विभागांचे अनुक्रमे X, Y आणि Z हे मध्यबिंदू

अशाप्रकारे ABC ह्या त्रिकोणाचे एकूण ९ बिंदू आपल्याला मिळाले आहेत आश्चर्याची गोष्ट अशी की हे सर्व बिंदू एकाच वर्तुळाच्या परिघवर असतात.



# परिभाषिक शब्दः

| | | |
|---|---|---|
| Arc | : | चाप |
| Chord | : | जीवा |
| Curve | : | वक्ररेषा |
| Decagon | : | दशकोन |
| Design | : | नक्षीकाम |
| Dodecagon | : | द्वादशकोन |
| Eillpse | : | दीर्घवर्तुळ |
| Equilateral Triangle | : | समभुज त्रिकोण |
| Hexagon | : | षट्कोन |
| Hyperabola | : | अपास्त |
| Illusion | : | दृष्टीभ्रम |
| Octagon | : | अष्टकोन |
| Parabola | : | अन्वस्त |
| Parallelogram | : | समांतरभुज चौकोन |
| Pattern | : | आकृतीबंध |
| Pentagon | : | पंचकोन |
| Perspective | : | यथार्थवस्तुचित्र दर्शन |
| Polygon | : | बहुभुजाकृती |
| Quadrangle | : | चौकोन |
| Rectangle | : | आयत |
| Right Angle Triangle | : | काटकोन त्रिकोण |
| Snowflake | : | हिमरेषा |
| Spiral | : | सर्पिल |
| Square | : | चौरस |
| Tile | : | फरशी |

भूमिती म्हणजे सिद्धांत, उपसिद्धांत
कृत्या आणि आकृत्या यांचं जंजाळ !
असं अनेकांचं मत बनलेलं असतं,
पण खरं म्हणजे त्यात फारसं तथ्य नसतं.
भूमिती म्हणजे सरळ आणि वक्र रेषांचं काव्य !
साहित्यातील काव्य शब्दांमधून प्रगट होतं,
तर भूमितीचं काव्य रेषांमधून साकार होतं.
प्रतिभावंत कवी अलंकारिक शब्दांशी खेळतात,
तर गणिती पंडित रेषांचे खेळ मांडतात.
त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन आणि बहुभुजाकृती,
वर्तुळ, अन्वस्त आणि अपास्त व्यक्त करतात भूमिती.
नियमित आकृत्यांचा आकर्षक मिलाफ,
निर्माण करतात सुंदर अद्भुत साज.
ह्या सर्व आकृत्यांशी दोस्ती करा,
आणि चला भूमितीशी खेळायला.

मोरया
प्रकाशन
'संपदा', शास्त्रीनगर, डोंबिवली (प.) ४२१ २०२